MATEMÁTICA PARA AGRONOMÍA Y CIENCIAS AMBIENTALES

CLAVE DE CORRECCIÓN

PRIMER EXAMEN PARCIAL – TEMA 2

26/09/2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dadas las funciones

$$g(x) = 2^x - 1 \; ; \; h(x) = x + 3$$

Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$f(x) = (g \circ h)(x) = 0$$

Resolución:

Empezamos por encontrar la expresión de $f(x)$ de la siguiente manera:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g[h(x)] = g[x + 3] = 2^{x+3} - 1$$

Por lo tanto, tenemos que $f(x) = 2^{x+3} - 1$

Determinamos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que $f(x) = 0$:

$$2^{x+3} - 1 = 0$$

$$2^{x+3} = 1$$

$$2^{x+3} = 2^0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Ejercicio 2 (3 puntos)
Hallar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$, sabiendo que la función

$$f(x) = 3 + \frac{4 - 6x}{ax + b}$$

tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ y que $f(0) = 7$

Resolución:

Por un lado, sabemos que $f(0) = 7$, entonces:

$$3 + \frac{4 - 6 \cdot 0}{a \cdot 0 + b} = 7$$

$$3 + \frac{4}{b} = 7$$

$$\frac{4}{b} = 4$$

$$4 = 4 \cdot b$$

$$1 = b$$

Es decir,

$$f(x) = 3 + \frac{4 - 6x}{ax + 1}$$

Por otro lado, sabemos que la función tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[3 + \frac{4 - 6x}{ax + 1}\right] = 1$$

Por propiedad del límite:

$$\lim_{x \to \infty} (3) + \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4 - 6x}{ax + 1}\right) = 1$$

$$3 + \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4 - 6x}{ax + 1}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4 - 6x}{ax + 1}\right) = -2$$

Al calcular el límite en la función, se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pero sabemos que, al salvarla, obtenemos 2 como resultado:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x\cdot\left(\frac{4}{x}-6\right)}{x\cdot\left(a+\frac{1}{x}\right)}\right]=-2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{4}{x}-6}{a+\frac{1}{x}}\right)=-2$$

En el numerador, cuando $x\to\infty$, $\frac{4}{x}\to 0$. Por lo tanto, el numerador tiende a "-6"

En el denominador, cuando $x\to\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$ por lo tanto, el denominador tiende a "a"

Esto significa que:

$$\frac{-6}{a}=-2 \quad \Rightarrow \quad a=3$$

De lo anterior, se obtiene que

$$f(x)=3+\frac{4-6x}{3x+1}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)
Siendo $P=(3;0)$, hallar todos los puntos de la forma $Q=(a;b)$ si se sabe que $|b|=1$ y la distancia entre ambos puntos es $\sqrt{2}$

Resolución:

Como $|b|=1$, las coordenadas del punto Q pueden ser de la forma

$$(a;1)\text{ ó }(a;-1)$$

Por otro lado, la distancia entre ambos puntos es $\sqrt{2}$.

Aplicando la fórmula que permite determinar la distancia entre ambos puntos, obtenemos:

- Si $Q=(a;1)$

$$d_{PQ}=\sqrt{(3-a)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(3-a)^2+(-1)^2}=\sqrt{(3-a)^2+1}$$

- Si $Q=(a;-1)$

$$d_{PQ}=\sqrt{(3-a)^2+(0+1)^2}=\sqrt{(3-a)^2+1^2}=\sqrt{(3-a)^2+1}$$

Por lo tanto, independientemente del valor de la ordenada del punto Q, se debe verificar que:

$$\sqrt{(3-a)^2+1}=\sqrt{2}$$

Resolvemos la ecuación planteada:

$$(3-a)^2+1=2$$
$$(3-a)^2=1$$
$$|3-a|=1$$

De lo anterior, por definición de módulo, tenemos dos posibilidades:

$3-a=1 \implies a=2$

$3-a=-1 \implies a=4$

Por lo tanto, las coordenadas del punto Q pueden ser:

$$(2;1) \text{ ó } (4;1) \text{ ó } (2;-1) \text{ ó } (4;-1)$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

La función $f(x)=A\cdot sen(Bx)+1$ **(A y B son constantes positivas)** tiene como conjunto imagen al intervalo $[-2;4]$ y su período es π. Hallar los valores de las constantes A, B u los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x)=4$

Resolución:

Empezamos determinando los valores de las constantes A y B.

Para esto, sabemos que el período de la función es π y que se obtiene haciendo $\frac{2\pi}{|B|}$

Por lo tanto:

$$\frac{2\pi}{|B|}=\pi \Rightarrow 2\pi=\pi\cdot|B| \Rightarrow \frac{2\pi}{\pi}=|B| \Rightarrow 2=|B|$$

Es decir que $B=2$ ó $B=-2$

Como en el enunciado se especifica que B es una constante positiva, necesariamente $B=2 \Rightarrow f(x)=A\cdot sen(2x)+1$

Por otro lado, sabemos que el conjunto imagen de la función es el intervalo $[-2;4]$ y la forma de la función es: $f(x)=A\cdot sen(2x)+1$

El "$+1$ " indica que tiene un corrimiento de un lugar hacia arriba sobre el eje y. Como en el enunciado aclaran que A es una constante positiva, el conjunto imagen de la función, podemos pensarlo como $[-A+1;A+1]$

Esto implica que:

$$-A+1=-2 \Rightarrow A=3$$

$$A + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad A = 3$$

Por lo tanto, la función es: $f(x) = 3 \cdot sen(2x) + 1$

Nos piden determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ donde $f(x) = 4$; para esto, resolvemos:

$$3 \cdot sen(2x) + 1 = 4$$

$$3 \cdot sen(2x) = 3$$

$$sen(2x) = 1$$

$$2x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$