MATEMÁTICA PARA AGRONOMÍA Y CIENCIAS AMBIENTALES

CLAVE DE CORRECCIÓN

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL 21/11/2018

TEMA 2

Ejercicio 1 (2 puntos)

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 3x - 5$ que son paralelas a la recta de ecuación $y = 9x - 5$

Resolución:

La ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0; g(x_0))$ es

$$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$$

Debemos hallar las coordenadas del o los puntos de tangencia.

Como la recta tangente debe ser paralela a $y = 9x - 5$ tenemos que $g'(x_0) = 9$

La derivada de la función es $g'(x) = 3x^2 - 3$.

Entonces,

$$3x_0^2 - 3 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2 \text{ ó } x_0 = -2$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$y_1 = 9(x - 2) + g(2)$

$y_2 = 9(x + 2) + g(-2)$

$g(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 5 = -3$

$g(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) - 5 = -7$

Finalmente tenemos que

$$y_1 = 9(x - 2) - 3$$
$$y_2 = 9(x + 2) - 7$$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Dado el siguiente sistema:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{siendo } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea compatible determinado.

Resolución:

Comenzamos determinando la matriz A, como tenemos la traspuesta de A, sabemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & k \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz obtenida es la matriz de los coeficientes. Construimos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & k & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Triangulamos la matriz poder estudiar el rango de la misma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & k & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 = f_2 - 3f_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & k-3 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 = f_3 + f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & k-3 & 3 \\ 0 & 0 & k-2 & 2 \end{array}\right)$$

Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema resulta incompatible. El número de filas distintas de cero de la matriz de los coeficientes (2) es distinto al número de filas de la matriz ampliada (3).

Si $k = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema resulta compatible determinado pues el número de filas distintas de cero de la matriz ampliada escalonada (3) es igual al número de ecuaciones el sistema (3)

Por lo tanto, para que el sistema sea compatible determinado, $k \neq 2$

Ejercicio 3 (2 puntos)
¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra MATEMÁTICAS?

Resolución:

La palabra **MATEMÁTICAS** tiene 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, 1 letra E, 1 letra I, 1 letra C y 1 letra S; en total 11 letras.

Para formar palabras distintas tenemos que tener en cuenta que:

- Cada palabra estará compuesta por las 11 letras.
- Cada palabra será diferente de otra solo cuando cambien de orden letras distintas.

Por ejemplo, si permutamos las 3 letras A en sus respectivos lugares, obtendríamos siempre la misma palabra

MATEMÁTICAS= MATEMÁTICAS= MATEMÁTICAS

Por lo tanto, se trata de una **permutación de 11 elementos con repetición** porque existe 1 elemento que se repite 3 veces (la letra A), 2 elementos que repiten 2 veces cada uno (las letras M y la letra T) y el resto de los elementos no se repiten.

Luego, aplicando la fórmula de permutaciones con repetición obtenemos la cantidad de palabras buscadas:

$$\boldsymbol{P_{11}^{3,2,2,1,1,1,1} = \frac{11!}{3!.\,2!.\,2!.\,1!.\,1!.\,1!.\,1!} = 1.663.200}$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar el valor de $k > 0,\ k \in \mathbb{R}$ que verifique

$$\int_2^k \frac{6x}{x^2-3}\,dx = 3\ln(6)$$

Resolución:

Comenzamos por integrar la función dada. Para esto, hacemos la siguiente sustitución:

$$u = x^2 - 3$$

$$du = 2x\,dx$$

Resolvemos la integral indefinida:

$$\int \frac{6x}{x^2-3} = \int \frac{3}{x^2-3}2x\,dx = \int \frac{3}{u}du = 3\ln(u) + C = 3\ln(x^2-3) + C$$

Entonces,

$$\int_2^k \frac{6x}{x^2-3}\,dx = 3\cdot\ln(x^2-3) + C\Big|_2^k = 3\ln(6)$$

$3\cdot\ln(x^2-3) + C|_2^k = 3\cdot\ln(k^2-3) + C - [3\cdot\ln(2^2-3) + C]$

Luego

$3\cdot\ln(k^2-3) + C - [3\cdot\ln(2^2-3) + C] = 3\ln(6)$

$3\cdot\ln(k^2-3) - 3\cdot\ln(4-3) = 3\ln(6)$

$3\cdot\ln(k^2-3) - 3\cdot\ln(1) = 3\ln(6)$

Como $\ln(1) = 0$:

$3\cdot\ln(k^2-3) = 3\ln(6)$

$\ln(k^2-3) = \ln(6)$

$k^2 - 3 = 6$

$k^2 = 9$

Por lo tanto:

$k = 3 \quad \vee \quad k = -3$

Como $k > 0$, entonces $k = 3$.