AN MAT A. ING Y FCEN Rec 2P 2C 2019 TEMA 1 03/12/19	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 90'
	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN: Apellido del evaluador:

El examen consta de ejercicios para completar en los cuales deberá escribir las respuestas en las líneas punteadas y ejercicios de opción múltiple donde se debe marcar la respuesta correcta (una sola respuesta es correcta en cada ejercicio). El desarrollo de los ejercicios se realizará en hoja borrador que no se entregará para su corrección.

Ejercicio 1. Sea una función f, tal que su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 1$ es $P(x) = 1 - (x-1) + 3(x-1)^2$.

a) (1 punto) El valor de $f''(1)$ es ....6.................................

b) (1 punto) Sea la función g definida por $g(x) = \int_1^{x^2} f(t)dt$. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de g centrado en $x_0 = -1$

..............$Q(x) = -2(x+1) - (x+1)^2$..

Solución.

a) Se sabe que $f''(1) = P''(1)$ por propiedades del Polinomio de Taylor. Por lo tanto, derivamos dos veces P y evaluamos en 1:

$$P'(x) = -1 + 6(x-1) \to P''(x) = 6 \to P''(1) = 6$$

b) El polinomio de Taylor de g es:

$$Q(x) = g(-1) + g'(-1)(x+1) + \frac{g''(-1)}{2}(x+1)^2$$

Luego, tenemos que calcular $g(-1), g'(-1)\ y\ g''(-1)$.

$$g(-1) = \int_1^{(-1)^2} f(t)dt = \int_1^1 f(t)dt = 0$$

Para las derivadas, como g esta definida a partir de una integral, usamos el Teorema Fundamental del Cálculo.

$$g'(x) = f(x^2)2x \to g'(-1) = f(1)2(-1) = -2P(1) = -2$$

$$g''(x) = f'(x^2)4x^2 + f(x^2)2 \to g''(-1) = f'(1)4.1 + f(1)2$$

$$\to g''(-1) = 4P'(1) + 2P(1) = -4 + 2 = -2$$

En conclusión, polinomio de Taylor pedido es:

$$Q(x) = -2(x+1) - (x+1)^2.$$

Ejercicio 2. (2 puntos) Sean las curvas $y = x - 6$ y $x = y^2$. El área encerrada entre los gráficos de las curvas se obtiene calculando:

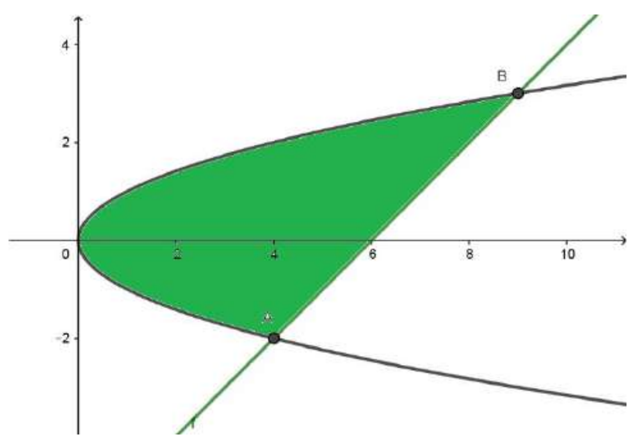
	$\int_0^9 (\sqrt{x} - x - 6)dx$		$\int_0^9 (\sqrt{x} - x + 6)dx$		$\int_0^9 (6 - x - \sqrt{x}\,)dx$
x	$\int_{-2}^3 (y + 6 - y^2)dy$		$\int_{-2}^3 (y^2 - y + 6)dy$		$\int_0^3 (y^2 - y - 6)dy$

Solución. La ecuación $x = y^2$, se la puede pensar como dos curvas, $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$. Por otro lado, la intersección entre las curvas originales se puede obtener resolviendo la ecuación:

$$x = (x-6)^2 \rightarrow x = 4 \; y \; x = 9$$

Los puntos correspondientes son: $A = (4, -2)$ y $B = (9, 3)$

Si hacemos el grafico, podemos visualizar el área en cuestión:

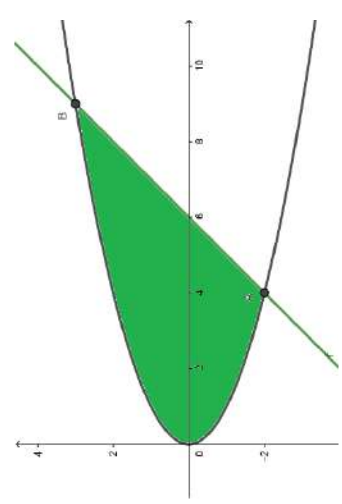


Hay dos formas de mirar esta área, si el gráfico lo miramos así, integraríamos respecto de x, los que no da la suma de varias áreas:

$$A = -\int_0^4 -\sqrt{x}\,dx + \int_0^4 \sqrt{x}dx + \int_4^9 (\sqrt{x} - (x-6))dx$$

$$\rightarrow A = 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx + \int_4^9 (\sqrt{x} - (x-6))dx$$

Esta respuesta no coincide con ninguna de las dadas.



En cambio, si la miramos respecto del eje y, nos queda más sencilla:

$$A = \int_{-2}^{3} ((y+6) - y^2)dy$$

Ejercicio 3. Dada la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3 3^n}$

a) (1 punto) El radio de convergencia es: …………3………………………

b) (1 punto) El intervalo de convergencia es:

	$(-\infty; 5]$	X	$[-1; 5]$		$(-1; 5)$
	$[-1; 5)$		$(-3; 3)$		$(2;+\infty)$

Solución:

Aplicando el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^n}{n^3 3^n}\right|} = \frac{|x-2|}{3\sqrt[n]{n^3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|x-2|}{3} < 1$$

De donde se ve el radio de convergencia:

$$|x-2| < 3$$

Para hallar el intervalo de convergencia: $|x-2| < 3 \;\; \rightarrow \;\; -1 < x < 5$

Se debe ver qué sucede en los bordes de este intervalo. Si $x = 5$, reemplazando en la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-2)^n}{n^3 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Es una serie p con p = 3, por lo tanto, es convergente

Si $x = -1$ reemplazando en la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

Y ésta última converge, por ser una serie alternada que cumple el criterio de convergencia. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $[-1;5]$

Ejercicio 4. Calcular las siguientes primitivas:

a) (1 punto) $\int \frac{x^2-(3x^2-2x)\ln(x^3-x^2)}{x^3-x^2}\,dx$

……………………………………………………………………………………………

b) (1 punto) $\int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx$

……………………………………………………………………………………………

Solución.

a) Tenemos que calcular $\int \frac{x^2-(3x^2-2x)\ln(x^3-x^2)}{x^3-x^2}dx = I$. Ésta se pude expresar como la diferencia de:

$$I = \int \frac{x^2}{x^3-x^2}dx - \int \frac{(3x^2-2x)\ln(x^3-x^2)}{x^3-x^2}dx$$

Calculamos cada integral por separado:

$$\int \frac{x^2}{x^2(x-1)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1| + K_1$$

$$\int \frac{(3x^2-2x)\ln(x^3-x^2)}{x^3-x^2}dx = \int \frac{(3x-2)\ln(x^3-x^2)}{x^3-x^2}dx$$

$$= \int \frac{\ln(u)}{u}du \quad con\ la\ sustitución\ u = x^3-x^2,$$

$$= \int zdz \quad con\ la\ sustitución\ z = \ln(u),$$

$$= \frac{z^2}{2} + K_2 = \frac{1}{2}\ln^2(u) + K_2 = \frac{1}{2}\ln^2(x^3-x^2) + K_2$$

Por lo tanto, $I = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln^2(x^3-x^2) + C$

b) Hay que calcular $\int \frac{x^3}{x^2-4}dx = I$

Lo que hacemos es resolver la división de polinomios:

$$\int \frac{x^3}{x^2-4}dx = \int \left(x + \frac{4x}{x^2-4}\right)dx$$

El primer término es una integral inmediata y el segundo tenemos que hacer fracciones simples:

$$\frac{4x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

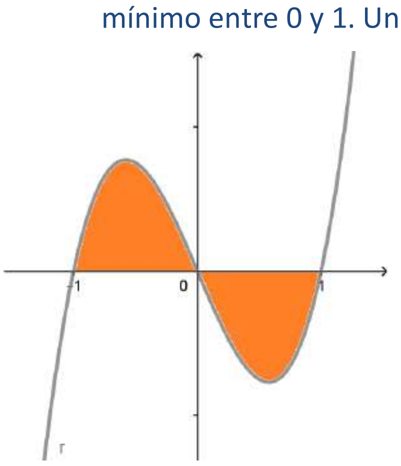
$$\rightarrow A = 2\ y\ B = 2$$

$$I = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C = \frac{x^2}{2} + 2\ln\ |x^2-4|$$

Ejercicio 5. (2 puntos) El valor de $a > 0$ para que el área encerrada entre la curva de ecuación $y = ax^3 - ax$ y el eje x sea igual a 8 es:

……………………………………………………………………………………………

Solución. La expresión de la curva es equivalente a: $ax(x^2-1) = y$. Por lo tanto, es una cubica con raíces 0, 1 y -1. Como $a > 0$, el máximo esta entre -1 y 0 y el mínimo entre 0 y 1. Un gráfico posible seria:



Como la función es impar, basta con calcular un área y luego multiplicar por dos.

$$A = 2\int_{-1}^{0} a(x^3 - x)dx = 2a\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} = -2a\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} = 8$$

$$\rightarrow a = 16$$