1) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!\,6^n}$

   a. El radio de convergencia es: ……………infinito…………………………

   b. El intervalo de convergencia es: ……………R……………………

Solución

Usamos el criterio de D'Alembert para analizar cuando converge la serie:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n+1}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{(x+3)^{n+1}}{(n+1)!\,6^{n+1}}}{\frac{(x+3)^n}{n!\,6^n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(x+3)^{n+1} n!\,6^n}{(n+1)!\,6^{n+1}\,(x+3)^n}\right] =$$

Acomodamos para poder simplificar y dejamos módulo solo en los factores que pueden ser negativos y tomamos límite:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[x+3]}{6(n+1)} = 0 < 1$$

Este límite es cero para cualquier valor de x, por lo tanto, es menor a 1 por lo que la serie converge para cualquier valor de x.|

2) Sea f una función con derivadas continuas hasta el orden 3 en R, y sea $p(x) = -x^2 + 4x - 3$ su polinomio de Taylor de orden 2, centrado en x = 2. Demostrar que f(x) tiene un máximo relativo o local en el punto (2, 1).

Solución:

$P(x) = -x^2 + 4x - 3$

$f(2) = P(2) = -2^2 + 4.2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$

$P'(x) = -2x + 4$

$f'(2) = P'(2) = -2.2 + 4 = -4 + 4 = 0$ (*x_0 =2 es P.C.)*

$P''(x) = -2$

$f''(2) = P''(2) = -2 < 0$ (*x_0 =2 es máximo local)*

Punto máximo local de *$f(x)$: (2; $f(2)$) = (2; 1)*

3) Calcular la siguiente integral indefinida: $\int \left(\frac{\ln^4(x+2)}{x+2} + xe^{-5x+1} \right) dx$

Solución:

Separar la integral como suma de integrales

$$\int \frac{\ln^4(x+2)}{x+2} dx + \int xe^{-5x+1} dx$$

En la primera integral aplicamos método de sustitución

$$t = \ln(x+2)$$

$$dt = \frac{1}{x+2} dx$$

$$\int \frac{\ln^4(x+2)}{x+2} dx = \int t^4 dx = \frac{t^5}{5} + C_1 = \frac{\ln^5(x+2)}{5} + C_1$$

La segunda integral por método de integración por partes

$u = x$ $\qquad$ $du = 1dx$

$dv = e^{-5x+1} dx$ $\qquad$ llamando $\quad z = -5x+1 \quad$ como $\quad dz = -5dx$

$$v = \int e^{-5x+1} dx = \frac{-1}{5} \int e^z dz = \frac{-1}{5} e^z + D = \frac{-1}{5} e^{-5x+1} + D$$

tomando una primitiva de v con D = 0, queda

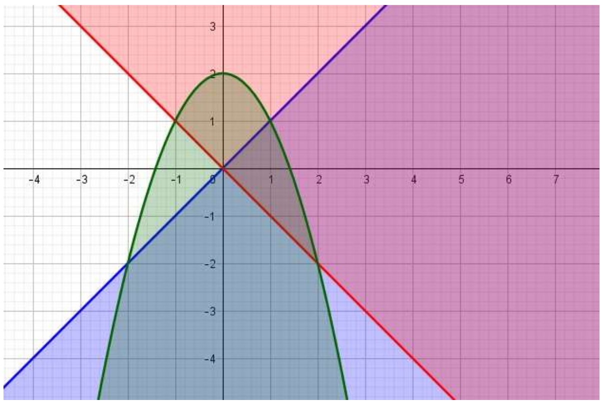
$$\int xe^{-5x+1} dx = -\frac{1}{5} xe^{-5x+1} - \int -\frac{1}{5} e^{-5x+1} dx = -\frac{1}{5} xe^{-5x+1} - \frac{1}{25} e^{-5x+1} + C_2$$

Por lo tanto $\int \frac{\ln^4(x+2)}{x+2} dx + \int xe^{-5x+1} dx =$

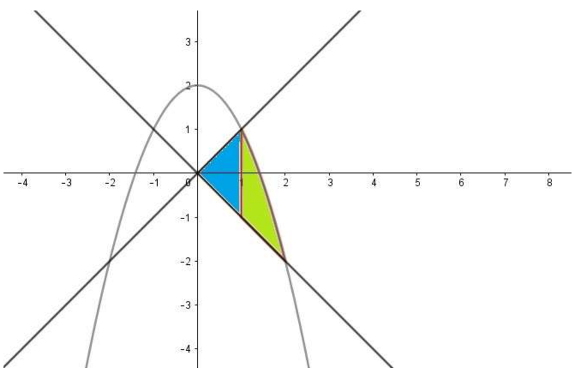
$$\boxed{= \frac{\ln^5(x+2)}{5} - \frac{1}{5} xe^{-5x+1} - \frac{1}{25} e^{-5x+1} + C}$$

4) Graficar la región que determinan las siguientes inecuaciones y calcular su área: $y \le x, \quad y \ge -x, \quad y \le 2 - x^2$.

Solución:



- La primera inecuación está sombreada de azul.
- La segunda de rojo.
- La tercera de verde.
- La zona más oscura es la intersección de las tres regiones, es el área que piden calcular.



Vemos que tenemos que calcular dos áreas porque cambia "el techo".

Buscamos el cruce de las curvas:

$y = x; \;\; y = -x \quad \rightarrow \quad x = -x \quad \rightarrow x = 0$

$y = x; \;\; y = 2 - x^2 \quad \rightarrow x = 2 - x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$, x = 1 o x = - 2 pero este valor lo descartamos.

$y = -x; \;\; y = 2 - x^2 \quad \rightarrow -x = 2 - x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$, x = 2 o x = - 1 pero este valor lo descartamos.

$$A1 = \int_0^1 (x - (-x))dx = \int_0^1 2x dx = x^2\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$A2=\int_{1}^{2}(2-x^2-(-x))dx=\int_{1}^{2}(2-x^2+x)dx=2x-x^3/3+x^2/2\Big|_1^2=$$

$$=4-8/3+2-(2-1/3+1/2)=7/6$$

$$A.total=A1+A2=1+7/6=13/6$$