Claves de corrección del primer parcial 2018 **Tema 1**

Ejercicios para completar

Escribir las respuestas en las líneas punteadas. El desarrollo de estos ejercicios no será tenido en cuenta. Se realizarán en una hoja borrador que no se entregará para su corrección.

Ej 1. (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{-x^2+x+2}{x-3}$

a) El conjunto de positividad de f es...$(-\infty,-1)U(2,3)$

Se quiere hallar x / $\frac{-x^2+x+2}{x-3} > 0$, para eso se plantea:

1) $-x^2+x+2>0$ y $x-3>0$

$-(x+1)(x-2)>0 \rightarrow x \in (-1,2)$ y $x>3$, entonces $S_1 = \emptyset$

2) $-x^2+x+2<0$ y $x-3<0$

$-(x+1)(x-2)<0 \rightarrow x \in (-\infty,-1)U(2,+\infty)$ y $x<3$, entonces

$S_2 = (-\infty,-1)U(2,3)$

$$S = S_1 U\, S_2 = (-\infty,-1)U(2,3)$$

b) La ecuación de la asíntota oblicua de f es: $y = -x-2$

Evaluamos primero límite si $x \rightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x\rightarrow -\infty} \frac{-x^2+x+2}{(x-3)x} = \lim_{x\rightarrow -\infty} \frac{-x^2+x+2}{x^2-3x} = -1$$

$$b = \lim_{x\rightarrow -\infty} \frac{-x^2+x+2}{x-3} + x = \lim_{x\rightarrow -\infty} \frac{-x^2+x+2+x^2-3x}{x-3} = \lim_{x\rightarrow -\infty} \frac{-2x+2}{x-3} = -2$$

Si $x \rightarrow +\infty$, los resultados de los límites son los mismos, entonces la ecuación de la asíntota oblicua es $y = -x-2$

Ej 2. (2 puntos) Sea $g(x) = \ln(-2x+1) - 3$, entonces:

a) El Dominio de g es.......$(-\infty,\frac{1}{2})$

Para que exista el logaritmo se debe cumplir:

$-2x+1>0$, despejando x

$-2x > -1$

$$x < \frac{1}{2}$$

b) La función inversa de g es $g^{-1}(x) :-\frac{1}{2}e^{x+3}+\frac{1}{2}$

Como la función g es biyectiva para el dominio definido en a), existe función inversa

Si $g(x) = \ln(-2x+1) - 3$ despejando x queda,

$y + 3 = \ln(-2x+1)$

$e^{y+3} = -2\text{x} + 1$

$e^{y+3} - 1 = -2\text{x}$

$\frac{e^{y+3} - 1}{-2} = \text{x}$

$g^{-1}(x) = \frac{e^{x+3} - 1}{-2} = -\frac{1}{2}e^{x+3} + \frac{1}{2}$

c) La ecuación de la recta tangente al gráfico de g en $x = 0$ es :$y = -2\text{x} - 3$

$g(0) = \ln(1) - 3 = -3$

$g'(x) = \frac{-2}{-2x+1}$

$g'(0) = \frac{-2}{1} = -2$

$y - (-3) = -2(\text{x} - 0)$

$y = -2\text{x} - 3$

d) Dada $f(x) = x + 4$, el dominio de gof es: $\ldots(-\infty, -\frac{7}{2})$

La expresión de la función compuesta

$gof(x) = \ln(-2(x+4) + 1) - 3$

$gof(x) = \ln(-2x - 7)) - 3$

Para hallar su Dominio,

$-2x - 7 > 0$

$x < -\frac{7}{2}$

Dominio de gof : ………$(-\infty, -\frac{7}{2})$

Recordemos que para que la función compuesta exista, $Imf \subseteq Domg$, en este caso debemos pedir que $x + 4 < \frac{1}{2}$, y se obtiene la condición de dominio hallada.

Ej 3. (3 puntos) Sea $f(x) = -5x - \frac{45}{x}$

a) El Dominio de f es. . $R - \{0\}$ ….y el conjunto de negatividad de f es$\ldots(0, +\infty)$

Por el denominador de la función, $x \neq 0$

Para hallar conjunto de negatividad, se calculan los ceros o raíces de la función

$$-5x - \frac{45}{x} = 0$$

$\frac{-5x^2-45}{x} = 0 \rightarrow -5x^2 = 45 \rightarrow x^2 = -9$ Absurdo, por lo tanto f no tiene raíces

Aplicando Corolario de Bolzano, se analiza $= (-\infty, 0)U(0, +\infty)$

Si $x < 0$ $\quad f(-1) = 50$, entonces f es positiva en $= (-\infty, 0)$

Si $x > 0$ $\quad f(1) = -50$, entonces f es negativa en $= (0, +\infty)$

b) El intervalo de crecimiento de f es...$(-3,0)U(0,3)$ y el intervalo de decrecimiento de f es…$(-\infty, -3)U(3, +\infty)$

Calculando la derivada primera de la función dada, se obtiene: $f'(x) = -5 + \frac{45}{x^2}$

$$f'(x) = -5 + \frac{45}{x^2} = 0$$

$$\frac{45}{x^2} = 5 \quad \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = -3 \quad ó \quad x = 3$$

Puntos críticos: $\{-3\ ,3\}$

Aplicando Corolario de Bolzano para f', se analiza $(-\infty, -3)U(-3,0)U(0,3)U(3, +\infty)$ teniendo en cuenta que $x = 0$ está fuera del dominio de la función.

$$f'(-4) < 0$$
$$f'(-1) > 0$$
$$f'(1) > 0$$
$$f'(4) < 0$$

Por lo tanto:

Intervalo de crecimiento de f: $(-3,0)U(0,3)$

Intervalo de decrecimiento de f: $(-\infty, -3)U(3, +\infty)$

c) Las coordenadas del máximo relativo son $(3, -30)$ y las del mínimo relativo son $(-3, 30)$

Del análisis anterior se obtiene que en $x = -3$ hay un mínimo relativo. Como

$f(-3) = 30$, las coordenadas del mínimo relativo son $(-3, 30)$.

En $x = 3$ hay un máximo relativo y

$f(3) = -30$, por lo tanto las coordenadas del máximo relativo son $(3, -30)$.

Ej 4. (3 puntos) Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3sen(5x)}{4x} + 1 & si\ x \neq 0 \\ k & si\ x = 0 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de $k\ \varepsilon\ R$, que hace que f sea continua en su dominio.

a) Para que f sea continua en su dominio, debemos estudiar su continuidad en $x = 0$, ya que fuera de ese valor es continua por ser suma y cociente de funciones continuas.

1) En $x = 0$ $f(0) = k$ por la definición de la función
2) Si $x \to 0^-$,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3sen(5x)}{4x} + 1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{3sen(5x).5}{4x.5} + 1 = \frac{15}{4} + 1 = \frac{19}{4}$$

Si $x \to 0^+$, se obtiene el mismo resultado, por lo tanto

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{3sen(5x)}{4x} + 1 = \frac{19}{4}$$

3) Para que f sea continua en $x = 0$, $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$, entonces $k = \frac{19}{4}$

b) Teniendo en cuenta el valor de k hallado en a) , indicar si existe $f'(0)$. En caso afirmativo, dar su valor.

La derivada de f por definición en $x = 0$ es:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3sen(5h)}{4h} + 1 - \frac{19}{4}}{h}$$

Los límites laterales cuando $h \to 0$, dan el mismo resultado , por lo tanto calculamos

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3sen(5h) - 15h}{4h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3sen(5h) - 15h}{4h^2}$$

Se trata de una indeterminación del tipo "0/0". Como se verifican las hipótesis de la Regla de L´Hopital, aplicamos la regla, entonces:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{15cos(5h) - 15}{8h}$$

Vuelve a quedar una indeterminación del tipo "0/0", donde se verifican las hipótesis de la Regla de L´Hopital, con lo que podemos volver a aplicar la regla

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-75sen(5h)}{8} = 0$$

Por lo tanto, $f'(0)$ existe y $f'(0) = 0$