Polinomio de Taylor de f centrado en c de grado n

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$$

Las derivadas de P_n en c coinciden con las derivadas en c de la función f

Resto de Taylor o término complementario

- Teorema del valor medio generalizado o Teorema de Cauchy

Sean h y g dos funciones que cumplen:

- Son funciones continuas en [a, b]
- Tienen derivadas finitas en (a, b)
- $\forall\ x \in (a, b)\quad g'(x) \neq 0$

Entonces:

$\exists\ c \in (a, b)$ talque $\dfrac{h(b) - h(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{h'(c)}{g'(c)}$

- **Teorema del resto de Taylor**

Sea f una función con derivada finita de orden (n+1) en todos los valores de x pertenecientes a un entorno de un valor c. Si x es un valor cualquiera de dicho entorno, entonces:

$\exists\ z \in (c, x)$ talque $f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de la función f centrado en x = c

Se define el Resto de Taylor del polinomio P_n como:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Consideraciones tenidas en cuenta para acotar el resto:

- e^x es estrictamente creciente y $e^1 < 3$
- sen x acotada entre 1 y -1 entonces $|\text{sen } x| < 1$
- cos x acotada entre 1 y -1 entonces $|\cos x| < 1$
- c < o > que un número y operar, ej si $c < 1$ entonces $3 + c < 3 + 1$
- $x \in (a, b)$ entonces por ejemplo $a - 1 < x - 1 < b - 1$

INTEGRALES

- Integral indefinida

$\int f(x)dx = F(x)$ significa F ' (x) = f (x)

- Integral definida

$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \Big|$

- Tabla de integrales indefinidas

$\int c\, f(x)dx$	$c\int f(x)dx$
$\int [f(x) + g(x)]dx$	$\int f(x)dx + \int g(x)dx$
$\int k\, dx$	Kx + c
$\int x^n\, dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + c, con n ≠ -1
$\int \frac{1}{x}\, dx$	Ln |x| + c
$\int e^x\, dx$	e^x + c

Propiedades

Cosec a = 1 / sen a — tg a = sen a / cos a

Sec a = 1 / cos a — sen^2 a + cos^2 a = 1

Cotg a = 1 / tg a — sen^2 a = (1 – cos2a) / 2

Arctg a = tg^{-1} a — cos^2 a = (1 + cos2a) / 2

Arcsen a = sen^{-1} a — Arccos a = cos^{-1} a

$\int a^x\, dx$	$\frac{a^x}{\text{Ln a}}$ + c
$\int sen\, x\ \ dx$	–cos x + c
$\int \cos x\ \ dx$	sen x + c
$\int \sec^2 x\ \ dx$	tan x + c
$\int cosec^2\, x\ \ dx$	–cotg x + c
$\int \sec x \tan x\ \ dx$	sec x + c

$\int cosec\, x\ \ cotg\, x\, dx$	-cosec x + c
$\int \frac{dx}{x^2+1}$	arctg x + c
$\int \frac{dx}{x^2+a}$	$\frac{1}{a}\, arctg\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsen x + c
$\int senh\ \ x\ \ dx$	cosh x + c
$\int \cosh x\ \ dx$	senh x + c

REGLA DE SUSTITUCIÓN

$$\int f\left(g(x)\right).g'(x)\, dx = \int f\,(u)\, du$$

u = g(x) → du = g' (x) dx

INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int f(x)\,.\ g'(x)\, dx = f(x)\,.\ g(x) - \int g(x)\,.\ f'(x)\, dx$$

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

- Consideremos la función racional f(x) = P(x) / Q(x) donde P y Q son funciones polinomiales. Es posible expresar f como una suma de fracciones simples, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q. A una fracción racional de este estilo se le llama propia.
- Si f es impropia, gr(P(x)) $\geq$ gr(Q(x)), entonces debemos tomar el paso preliminar de dividir P entre Q hasta obtener el residuo R(x) de manera que gr(R(x)) < gr(Q(x))

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & S(x) \\ R(x) & \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

- Factorizar el denominador Q(x) tanto como sea posible
- Expresar la función racional propia como una suma de fracciones parciales

$$\frac{Ax + B}{(a x + b)^n} = \frac{A_1}{(a x + b)^n} + \frac{A_2}{(a x + b)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{(a x + b)}\ .$$

$$\frac{Ax + B}{(a x + b)(c x + d)} = \frac{A_1}{(a x + b)} + \frac{A_2}{(c x + d)}\ .$$

$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)(dx + e)} = \frac{A_1 x + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2}{dx + e}\ .$$

Donde $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces reales

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- Parte 1

Si f es continua sobre [a, b], entonces la función g definida por

$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \leq x \leq b$

es continua sobre [a, b] y derivable sobre (a, b)

$$\frac{d}{dt} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

- Parte 2 BARROW

Si f es continua sobre [a, b], entonces

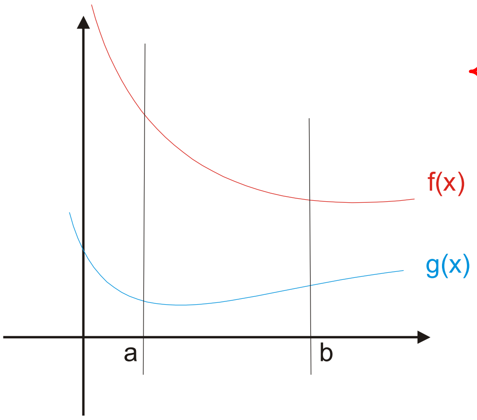
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Donde F es una antiderivada de f, es decir F' = f

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Donde F' = f

ÁREA ENTRE CURVAS

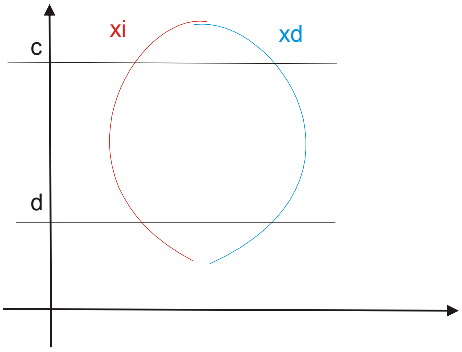


El área de la región delimitada por las curvas y = f(x), y = g(x) y las rectas x = a, x = b, donde f y g son continuas y f(x) $\geq$ g(x) $\forall$ x $\in$ [a, b]

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

El área entre las curvas y = f(x), y = g(x) entre x = a y x = b

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$



$$A = \int_c^d (xd - xi)\, dy$$

ECUACIONES DIFERENCIALES GENERALES

Contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas

El orden de la ecuación diferencial es el de la mayor de sus derivadas

Ejemplo: y' = x y   y una función f se llama solución de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando y = f(x) y sus derivadas se sustituyen en la ecuación:

$f'(x) = x\ f(x) \rightarrow f'(x) / f(x) = x \rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int x\, dx \rightarrow \ln f(x) = x^2 / 2 + k \rightarrow f(x) = e^{x^2/2} + K$

SUCESIONES

Si lím a_n $\begin{cases} \text{existe} \rightarrow \text{la sucesión converge} \\ = \infty \text{ no existe} \rightarrow \text{la sucesión diverge} \end{cases}$

Leyes de los límites para sucesiones

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces:

- Lím $(a_n \pm b_n)$ = lím $a_n \pm$ lím b_n
- Lím c = c
- Lím c . a_n = c . lím a_n
- Lím $(a_n . b_n)$ = lím a_n . lím b_n
- Lím $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\text{lím } a_n}{\text{lím } b_n}$ si lim $b_n \neq 0$
- Lím $a_n^p = [\text{lím } a_n]^p$ si $p > 0$ y $a_n > 0$

El teorema de la comprensión para sucesiones

Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ y lím a_n = lím c_n = L $\rightarrow$ lím b_n = L

Teorema

Si lím $|a_n| = 0 \rightarrow$ lím $a_n = 0$

Teorema

Sí lim a_n = L y la función es continua en L $\rightarrow$ lím $f(a_n) = f(L)$

La sucesión $\{r^n\}$ es convergente si $-1 < r \leq 1$ y divergente para todos los otros valores de r

Lím $r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$

Una sucesión $\{a_n\}$ se llama creciente si $a_n < a_{n+1}$ $\forall$ $n \geq 1$

Si $a_n > a_{n+1}$ $\forall$ $n \geq 1$ se denomina decreciente

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada por arriba si $\exists$ M $\in$ R / $a_n \leq M$ $\forall$ $n \geq 1$

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada por abajo si $\exists$ m $\in$ R / $m \leq a_n$ $\forall$ $n \geq 1$

Si está acotada por arriba y por abajo, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión acotada

Teorema de la sucesión monótona

Toda sucesión acotada y monótona es convergente

SERIES

Serie infinita o serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad \sum a_n$$

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$, sea s_n la n-ésima suma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y $\lim s_n = s$ existe como un número real, entonces la serie $\sum a_n$ se dice convergente y se escribe:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

El número s se llama suma de la serie

Si la sucesión $\{s_n\}$ es divergente entonces la serie es divergente

La serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots$$

es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a / (1 - r)$$

Si $|r| \geq 1$ la serie geométrica es divergente

Teorema

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim a_n = 0$

El inverso NO se cumple: si $\lim a_n = 0$ no podemos concluir que la serie es convergente

La prueba de la divergencia

Si $\lim a_n \nexists$ o $\lim a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

Teorema

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes $\left\{\begin{array}{l} \sum c\, a_n \quad (c - \text{constante}) \\ \sum (a_n + b_n) \\ \sum (a_n - b_n) \end{array}\right\}$ también son convergentes y

i) $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Serie p

$\sum \frac{1}{n^p}$ convergente $p > 1$

divergente $p \leq 1$

Serie de potencias

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$

Serie de potencias en (x – a), o serie de potencias centrada en a, o serie de potencias en torno a a.

Cuando x = a entonces todos los términos son 0 para $n \geq 1$ entonces es convergente cuando x = a

Prueba de la integral

Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente sobre $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$

- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
- Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es divergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

No es necesario iniciar en n = 1

No es necesario que f sea siempre decreciente, lo tiene que ser a partir de un número N entonces la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Pruebas por comparación

Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos

- Si $\sum b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n$ $\forall n$ entonces $\sum a_n$ es convergente
- Si $\sum b_n$ es divergente y $a_n \geq b_n$ $\forall n$ entonces $\sum a_n$ es divergente

$1/(2^n + 1) < 1/2^n$ $\qquad |\cos n| / n^2 \leq 1/n^2$ $\qquad 1/(2^n - 1) > 1/2^n$

$5/(2n^2 + 4n + 3) < 5/(2n^2)$ $\qquad \sum \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2}\sum \frac{1}{n^2}$

$(\text{Ln } k)/k > 1/k$ porque $\ln k > 1$ para $k \geq 3$

Prueba por comparación del límite

Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series de términos positivos. Si

$$\text{Lím } (a_n / b_n) = c$$

donde c es un número finito y c > 0 entonces ambas series convergen o ambas divergen.

Prueba de la serie alternante

Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots \qquad b_n > 0$$

cumple con:

i) $b_{n+1} \leq b_n$ $\quad \forall n$

ii) $\text{lím } b_n = 0$

entonces la serie es convergente

Absolutamente convergente

- Una serie $\sum a_n$ es llamada absolutamente convergente si la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ es convergente

- Teorema

Si una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente entonces es convergente

Prueba de la razón (criterio de D'Alambert)

- Si lim $|a_{n+1} / a_n| = L < 1$ → $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente → es convergente
- Si lim $|a_{n+1} / a_n| = L > 1$ o lim $|a_{n+1} / a_n| = \infty$ → $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente
- Si lim $|a_{n+1} / a_n| = 1$ la prueba no es concluyente

Prueba de la raíz (criterio de Cauchy)

- Si lím $\sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ → $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente → es convergente
- Si lím $\sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o lím $\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ → $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente
- Si lím $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ la prueba no es concluyente

En los ejemplos siguientes no se presenta todo el desarrollo, sino que simplemente se indica qué prueba se debe usar.

V EJEMPLO 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Puesto que $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ cuando $n \to \infty$, debe usar la prueba para la divergencia.

EJEMPLO 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n es una función algebraica de n, compare la serie dada con la serie p. La serie de comparación para la prueba de comparación en el límite es Σb_n, donde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$

V EJEMPLO 3 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Puesto que la integral $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ se evalúa con facilidad, use la prueba de la integral. La prueba de la razón también funciona.

EJEMPLO 4 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como la serie es alternante, aplique la prueba de la serie alternante.

V EJEMPLO 5 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como la serie contiene $k!$, se aplica la prueba de la razón.

EJEMPLO 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

La serie está estrechamente relacionada con la serie geométrica $\Sigma\, 1/3^n$, por lo que se aplica la prueba por comparación.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ prueba de la raíz

$\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow |x|$

|x| < 1 entonces converge absolutamente **radio de convergencia = 1**

|x| > 1 entonces diverge **intervalo de convergencia (-1, 1)**

x = -1 prueba de la serie alternante, x = 1 serie p