MÓDULO

- $|a| = |-a| \geq 0$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a/b| = |a| / |b|$, $b \neq 0$
- $|a^n| = |a|^n$
- $a > 0 \begin{cases} |x| = a \Leftrightarrow x = \pm a \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ o } x < -a \end{cases}$
- $d(a, b) = |b - a| = |a - b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

PROPIEDAD DE POTENCIA

- $a^0 = 1$, $a \neq 0$
- $a^1 = a$
- $a^{-n} = 1 / a^n = (1/a)^n$
- $(a/b)^{-1} = b/a$
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $a^n . a^m = a^{n+m}$
- $a^n / a^m = a^{n-m}$, $a \neq 0$
- $(a^n)^m = a^{n.m}$
- $(a . b)^m = a^m . b^m$
- $(a/b)^n = a^n / b^n$ $\qquad a, b \neq 0$
- $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0$ y $b^2 = a$
- $a^{m/n} = a^{m.(1/n)} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^{m/n} . a^{p/q} = a^{m/n + p/q}$
- $(a^{m/n})^{p/q} = a^{(m.p)/(n.q)}$
- $(a . b)^{m/n} = a^{m/n} . b^{m/n}$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Casos particulares

$\frac{a/1}{c/d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{d}{c}$

$\frac{a/b}{c/1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$

PRODUCTOS NOTABLES

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

FUNCIÓN LINEAL

$y = m\,x + n$ m – pendiente y n – ordenada al origen

$m = (y1 – y0) / (x1 – x0)$

$m > 0$ creciente
$m = 0$ constante
$m < 0$ decreciente

recta vertical $x = a$

recta horizontal $y = b$

rectas paralelas $m1 = m2$ rectas perpendiculares $m1 = - 1 / m2$

FUNCIÓN CUADRÁTICA

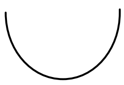
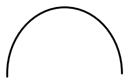
$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ x1, x2 raíces
$f(x) = a\,(x – x1)\,(x – x2)$

$x1 + x2 = - b/ a$ $x1 \,.\, x2 = c/ a$

eje de simetría: $(x1 + x2) / 2$

Vértice: xv = - b/ 2ª
xv = (x1 + x2) / 2

$f(x) = a\,(x – xv)^2 + yv$

$a > 0$  $a < 0$ 

FUNCIÓN POLINÓMICA

$f(x) = a\,(x – x1)\,(x – x2). . . (x – xn)$ x1, x2, . . ., xn son las raíces

FUNCIÓN BICUADRADA

$f(x) = a\,x^4 + b\,x^2 + c$ $a \neq 0$
CV $x^2 = z$
$f(z) = a\,z^2 + b\,z + c$

COTA, SUPREMO, ÍNFIMO, MÁXIMO Y MÍNIMO

Cota inferior → menor o igual que todos los elementos del conjunto

Acotado inferiormente → tiene cota inferior

Cota superior → mayor o igual que todos los elementos del conjunto

Acotado superiormente → tiene cota superior

Supremo → mínima cota superior

Máximo → es el supremo si éste pertenece al conjunto

Ínfimo → máxima cota inferior

Mínimo → es el ínfimo si éste pertenece al conjunto

FUNCIÓN PAR E IMPAR

f es par si $f(-x) = f(x)$ para todo x perteneciente al Dom f

f es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x perteneciente al Dom f

FUNCIÓN CRECIENTE Y DECRECIENTE

f es creciente si $f(x1) < f(x2)$ con $x1 < x2$

f es decreciente si $f(x1) > f(x2)$ con $x1 < x2$

DOMINIO E IMAGEN

Dominio → se ve en el eje x
Imagen → se ve en el eje y

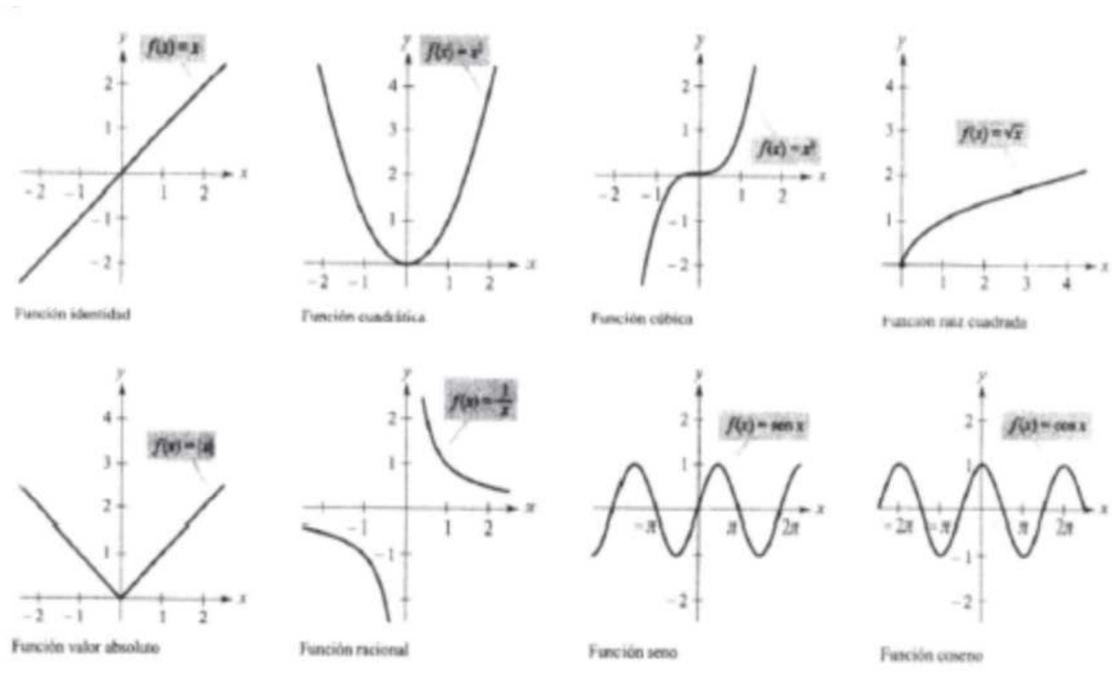
√a → dominio $a > 0$
1/ a → dominio $a \neq 0$
L a, ln a y log a → dominio $a > 0$

FUNCIÓN HOMOGRÁFICA

$y = (ax + b) / (cx + d)$ $c \neq 0$ para que no sea función lineal
$ad - bc \neq 0$ para que no sea función constante

Dom f = { x perteneciente a R / $cx + d \neq 0$ }

FUNCIONES TÍPICAS



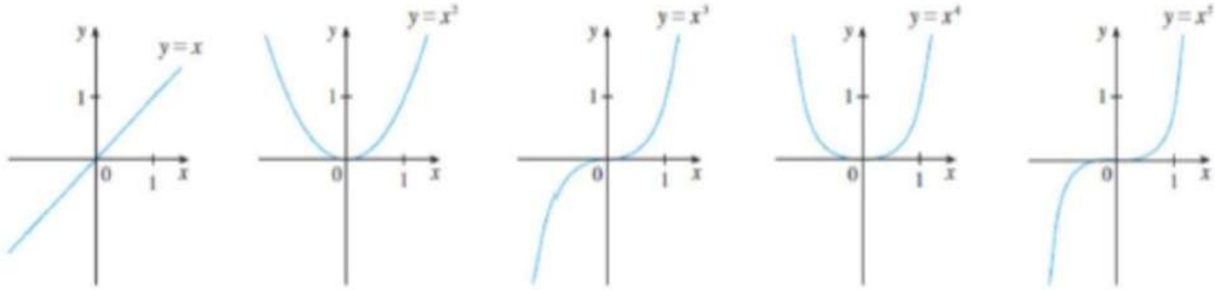
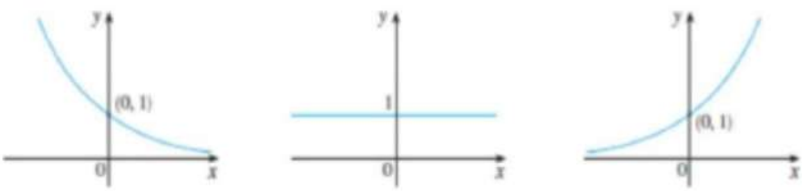
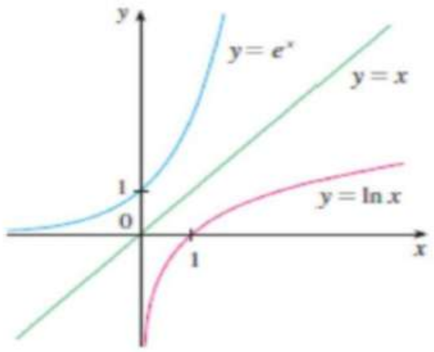
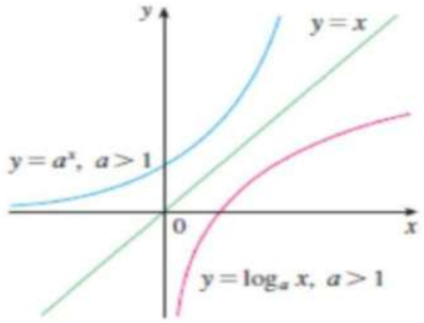


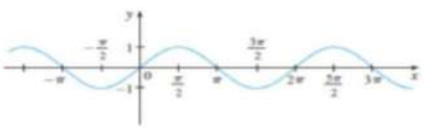
FIGURA 11 Gráficas de $f(x)=x^n$ para $n=1, 2, 3, 4, 5$

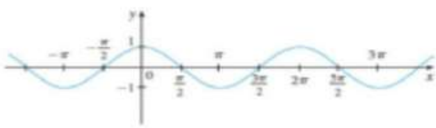


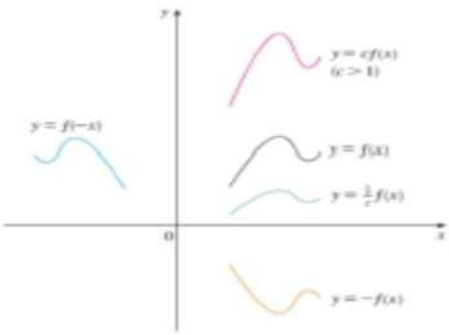
a) $y=a^x$, $0<a<1$ b) $y=1^x$ c) $y=a^x$, $a>1$

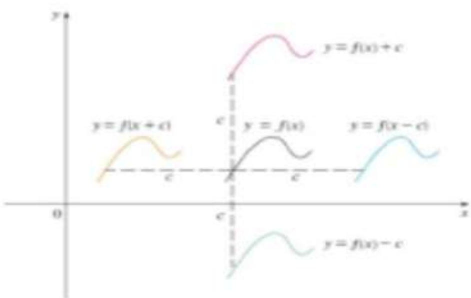


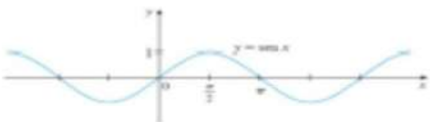


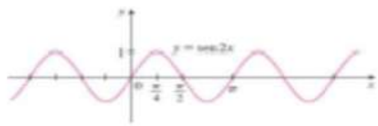

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$

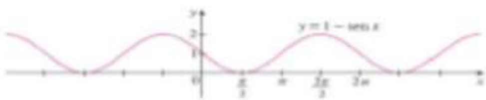

b) $g(x) = \cos x$

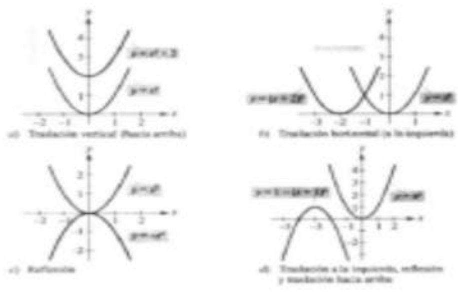












COMBINACIÓN DE FUNCIONES

A = Dom f
B = Dom g

(f + g) (x) = f(x) + g(x)
(f – g) (x) = f(x) – g(x)   A $\cap$ B = Dom (f $\pm$ g)
(f . g) (x) = f(x) . g(x)   A $\cap$ B = Dom (f . g)
(f / g) (x) = f(x) / g(x)   Dom (f/g) = { x perteneciente A $\cap$ B / g(x) ≠ 0 }

Función compuesta   (f o g) (x) = f (g(x))
Dom (fog) = { x pertenecientes al Dom g / g(x) pertenezca al Dom f }

Función biyectiva

- $y = x^2$ R → R no es biyectiva
  [0, + inf) → [0, + inf) es biyectiva
- $y = x^3$ R → R es biyectiva
- y = sen x   [-pi/2, pi/2] → [-1, 1] es biyectiva
  ceros: x = k pi
- y = cos x   [0 , pi] → [-1, 1] es biyectiva
  ceros: x = pi/2 + k pi

Si f es biyectiva → f es invertible

Función inversa $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$ para cualquier y perteneciente a la Im f
Dom f^{-1} = Im f
Im f^{-1} = Dom f

Como encontrar la función inversa

1) Escribir y = f(x)
2) Despejar x
3) Intercambiar x por y e y por x

FUNCIÓN LOGARITMO

$\log_a x = y \iff a^y = x$

$\ln x = y \iff e^y = x$

Cambio de base $\log_a x = \ln x \ / \ \ln a$

LEYES DE LOS LÍMITES

c es una constante, n un entero positivo y los límites: $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen

1) lím [f(x) + g(x)] = lím f(x) + lím g(x)
2) lím [f(x) – g(x)] = lím f(x) – lím g(x)
3) lím [c f(x)] = c lím f(x)
4) lím [f(x) . g(x)] = lím f(x) . lím g(x)
5) lím [f(x) / g(x)] = lím f(x) / lím g(x) si lím g(x) ≠ 0
6) lím $[f(x)]^n$ = $[\text{lím } f(x)]^n$
7) lim c = c
8) lím x = a
9) lím $x^n = a^n$
10) lím $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ (si n es par, suponemos a > 0)
11) lím $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\text{lím } (f(x))}$ (si n es par, suponemos lím f(x) > 0)

ASÍNTOTA VERTICAL

La recta **x = a es asíntota vertical** de la curva y = f (x) si una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$\lim_{x \to a} f(x) = +\text{inf}$ $\lim_{x \to a-} f(x) = +\text{inf}$ $\lim_{x \to a+} f(x) = +\text{inf}$

$\lim_{x \to a} f(x) = -\text{inf}$ $\lim_{x \to a-} f(x) = -\text{inf}$ $\lim_{x \to a+} f(x) = -\text{inf}$

ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta **y = L es asíntota horizontal** de la curva y = f (x) si:

$\lim_{x \to +\text{inf}} f(x) = L$ $\lim_{x \to -\text{inf}} f(x) = L$

ASÍNTOTA OBLICUA y = m x + n

$\lim_{x \to +/-\text{inf}} f(x) = \pm \text{inf}$ entonces f(x) no tiene asíntota horizontal

$m = \lim_{x \to \text{inf}} f(x) / x$

$n = \lim_{x \to \text{inf}} [f(x) - mx]$

TEOREMA

Si **f(x) ≤ g(x) cuando x → a** (excepto posiblemente en x = a) y los límites de f y g existen cuando x → a entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

TEOREMA DE LA COMPRENSIÓN

Si **$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ cuando $x \to a$** (excepto posiblemente en x = a) y **lím f(x) = lím h(x) = L cuando $x \to a$** entonces:

lím g(x) = L cuando $x \to a$

LIMITES TIPO

lím $\sqrt[x]{x} = 1 \quad x \to +\inf$

lím $\sqrt[x]{x!} = +\inf \quad x \to +\inf$

lím $(1 + 1/x)^x = e \quad x \to \pm \inf$

lím $e^x / x = +\inf \quad x \to \inf$

lím $(\ln x) / x = -\inf \quad x \to 0+$

lím $(\operatorname{sen} x) / x = 1 \quad x \to 0$

INDETERMINACIÓN 0^0, INF^0, 1^{INF}

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \ln f(x)}$$

DEFINICIÓN DE DERIVADA

$$f'(x0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x0 + h) - f(x0)}{h}$$

RECTA TANGENTE A LA CURVA f(x)

$$y = f'(x0)\,(x - x0) + f(x0)$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

$$(f^{-1})'(x) = 1 / f'(f^{-1}(x))$$

REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN DE FUNCIONES ELEMENTALES

c - constante

función	derivada		función	derivada
c u	c u’		u $\pm$ v	u’ $\pm$ v’
u . v	u v’ + u’ v		u / v	$\frac{u' v - u v'}{v^2}$
c	0		u^n	n . u^{n-1} . u’
x	1		|u|	$\frac{u}{\lvert u \rvert}$. u’ (u ≠0)
ln u	u’ / u		e^u	e^u . u’
sen u	(cos u) . u’		cos u	-(sen u) . u’
u^v	v’. ln u + v . u’/u		u o v (a)	U ‘ (v(a)) . v’ (a)

tg u	(sec^2 u) . u’		ctg u	-($cosec^2$ u) . u’
sec u	(sec u . tg u) . u’		cosec u	-(cosec u . cotg u) . u’
arcsen u	$\frac{u'}{\sqrt{(1 - u^2)}}$		arccos u	$\frac{-u'}{\sqrt{(1 - u^2)}}$
arctg u	$\frac{u'}{1 + u^2}$		arccotg	$\frac{-u'}{1 + u^2}$
arcsec u	$\frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{(u^2 - 1)}}$		arccosec u	$\frac{-u'}{\lvert u \rvert \sqrt{(u^2 - 1)}}$

- f derivable en I

Para todo x perteneciente a I, f ’ (x) $\geq$ 0 → f es creciente en I
f ’ (x) > 0 → f es estrictamente creciente en I

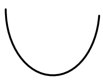
- f derivable en I

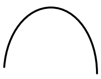
Para todo x perteneciente a I, f ’ (x) $\leq$ 0 → f es decreciente en I
f ’ (x) < 0 → f es estrictamente decreciente en I

-

f ‘ (x) > 0		f ‘ (x) < 0		f ‘ (x) > 0
	máximo		mínimo	

- Concavidad

f ’’(x) > 0 

f ’’(x) < 0 

- f es **continua** en a si lím f(x) = f(a) cuando x → a

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

f continua en [a, b] y f (a) < N < f (b) entonces existe c ∈ (a, b) / f (c) = N

TEOREMA DE BOLZANO

f continua en [a, b] / f(a) < 0 y f(b) > 0 entonces existe c ∈ (a, b) / f (c) = 0

- f es derivable en x = a entonces f es continua en x = a

TEOREMA DE ROLLE

$$\left.\begin{array}{l}\text{f continua } [a, b] \\ \text{f derivable } (a, b) \\ f(a) = f(b)\end{array}\right\} \quad \text{entonces existe } c \in (a, b) \;/\; f'(c) = 0$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

$$\left.\begin{array}{l}\text{f continua } [a, b] \\ \text{f derivable } (a, b)\end{array}\right\} \quad \text{entonces existe } c \in (a, b) \;/\; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

L' HOSPITAL "0/0" "inf/inf"

$$\left.\begin{array}{l}\text{f y g derivables} \\ g'(x) \neq 0 \\ \lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ o inf} \\ \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ o inf}\end{array}\right\} \quad \lim_{x \to a} f(x) / g(x) = \lim_{x \to a} f'(x) / g'(x)$$

" 0 . acotado" = 0

"0 . inf"

f . g = f / (1/g) = g / (1/f) aplico L'Hospital

" inf – inf"

Convertirla en un cociente (común denominador, racionalizando o factorizando un factor común) y luego aplicar L'Hospital

CANTIDAD DE CEROS

Hacer el estudio de la función y graficar

ESTUDIO DE FUNCIONES

- Dominio
- Imagen (en algunas se va a saber recién al hacer la gráfica)
- Ceros (siempre que sea posible)
- Asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas
- Derivada primera (ceros de la derivada, ver donde es positiva y donde es negativa)

  Crecimiento y decrecimiento de f

  Máximos y mínimos locales de f
- Derivada segunda (ceros de la derivada, ver donde es positiva y donde es negativa)

  Concavidad de f

  Puntos de inflexión de f
- Gráfica