ANÁLIS. MATE. ING. - EXAC. 1F2C2017 TEMA 2 - 18-12-17 UBA XXI	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 2 hs
	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN:
	E-MAIL:	
	TELÉFONOS part: cel:	Apellido del evaluador:

Completar con letra clara, mayúscula e imprenta

El examen cuenta con diez ejercicios de opción múltiple. Cada uno vale un punto. En estos ejercicios únicamente se corregirá la opción marcada. Se debe elegir una ÚNICA respuesta. Si se escribe más de una opción se considerará inválida la respuesta.
El examen tiene que ser entregado en tinta y no se permite el uso de teléfonos móviles ni calculadoras.
Copie sus resoluciones en una hoja que será entregada por el personal de UBA XXI para comparar con los criterios de corrección que estarán disponibles en la solapa "Evaluación" del campus virtual de la materia.

1) Sea $p(x)=3-2x+x^3$ el polinomio de Taylor de grado 3, centrado en x = 1, de una función *f*. Entonces, la recta tangente a $g(x)=x^2 f(2x)+\int_1^{2x} f(t)dt$ en x = 1/2 es:

- [ ] $y=8x-5$
- [ ] $y=8x-1$
- [x] $y=\frac{13}{2}x-\frac{11}{4}$
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Resolución

Este ejercicio es sencillo si se saben algunas propiedades. Para la recta tangente necesitamos:

$$y=g(1/2)+g'(1/2)(x-1/2)$$

$$g(1/2)=(1/2)^2 f(2.\frac{1}{2})+\int_1^{2.1/2} f(t)dt$$

Pero la integral desde 1 hasta 1 vale 0. Entonces quedó:

$$g(1/2)=(1/2)^2 f(1)=\frac{1}{4}f(1)=\frac{1}{4}p(1)=\frac{1}{4}.2=\frac{1}{2}$$

Y la derivada de g queda:

$$g'(x)=2x.f(2x)+x^2.f'(2x).2+f(2x).2$$

$$g'(1/2)=2.\frac{1}{2}.f(1)+(1/2)^2.f'(1).2+f(1).2=$$

$$=3f(1)+\frac{1}{2}f'(1)=3.2+\frac{1}{2}p'(1)=3.2+\frac{1}{2}.1=6+1/2=13/2$$

Reemplazamos:

$$y=\frac{1}{2}+\frac{13}{2}(x-1/2)$$

$$y=\frac{13}{2}x-\frac{11}{4}$$

2) Las ecuaciones de las asíntotas verticales de la función $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^3-3x^2+bx}$ donde b es el valor de la ordenada del punto de inflexión de la función $g(x)=x^3-3x^2+2x+2$, son:

- [ ] x = 0
- [x] x = 0, x = 1
- [ ] x = 0, x = 2, x = 1
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Resolución

Primero sacamos el punto de inflexión, para eso hay que derivar dos veces:

$$g(x)=x^3-3x^2+2x+2$$
$$g'(x)=3x^2-6x+2$$
$$g''(x)=6x-6=0$$
$$x=1$$

Vemos que la derivada segunda de un lado del x = 1 es negativa y del otro positiva. Por lo tanto, en x = 1 hay un punto de inflexión. Pero nos dicen la "ordenada", es decir, el valor de y.
Entonces:

$$g(1)=1-3+2+2=2$$

Reescribimos la función con b = 2:

$$f(x)=\frac{2x-4}{x^3-3x^2+2x}$$

Sacamos el dominio.

$$x^3-3x^2+2x\neq 0$$
$$x(x^2-3x+2)\neq 0$$
$$Df=R-\{0,1,2\}$$

Hay 3 candidatos a ser A.V. Hay que tomar el límite con cada uno. Con x tendiendo a 0 y tendiendo a 1 el límite da infinito (sin importar el signo). En cambio con x = 2 hay una indeterminación que, una vez salvada, da 1.
Por lo tanto las primeras dos son A.V.

3) La suma de la siguiente serie $\sum_{n=2}^{\infty} 3r^{n+1}$, donde $r=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-3}-n\right)$ es:

- [x] 3/4
- [ ] ∞
- [ ] 3
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Resolución

En primer lugar calculamos el límite, como es una indeterminación hay que salvarla. Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-3}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-3}-n\right).\frac{\left(\sqrt{n^2+n-3}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n-3}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+n-3-n^2\right)}{\left(\sqrt{n^2+n-3}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)}{\left(\sqrt{n^2+n-3}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)}{\left(\sqrt{n^2(1+1/n-3/n^2)}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)}{\left(n\sqrt{(1+1/n-3/n^2)}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-3/n)}{\left(n\left(\sqrt{(1+1/n-3/n^2)}+1\right)\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-3/n)}{\left(\left(\sqrt{(1+1/n-3/n^2)}+1\right)\right)}=\frac{1}{2}$$

Entonces queda una geométrica, pero no comienza en n = 0

$$\sum_{n=2}^{\infty}3\,r^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}3.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{1-1/2}-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}.\left(2-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

4) Una primitiva de $\int(4x+6)e^{p(x)}dx$ donde $p(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 2, centrado en x = 0, de la función $f(x)=sen(3x)-1+x^2$ es:

☐ $4e^{x^2+3x-1}+(4x+6)e^{x^2+3x-1}$

☐ e^{x^2+3x-1}

☐ e^{2x^2+6x-1}

■ Ninguna de las otras es correcta

Resolución

El polinomio de orden 2 de la función, centrado en x = 0 es:

$$p(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$

$$f(x)=sen(3x)-1+x^2$$
$$f'(x)=\cos(3x).3+2x$$
$$f''(x)=-sen(3x).3.3+2$$
$$f(0)=sen(0)-1+0=-1$$
$$f'(0)=\cos(0).3+0=3$$
$$f''(0)=-9sen(0)+2=2$$

$$p(x)=-1+3x+\frac{1}{2}.2x^2=-1+3x+x^2$$

Entonces, una primitiva es:

$$\int(4x+6)e^{p(x)}dx=\int(4x+6)e^{-1+3x+x^2}dx=\int 2(2x+3)e^{-1+3x+x^2}dx=$$

que se resuelve aplicando el método de sustitución:

$$\int 2e^{u} du = 2e^{u} + C = 2e^{-1+3x+x^2} + C$$

5) Sea $f: R \to R$ derivable en R infinitamente, tal que cumple $f(x)\, f'(x) + x = 1,\ f(1) = 2$, entonces, su polinomio de Taylor de grado 2, centrado en x = 1 es:

- [x] $p(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1)^2$
- [ ] $p(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}(x-1)^2$
- [ ] $p(x) = 2 - \frac{1}{2}(x-1)^2$
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Resolución

Armamos el polinomio de Taylor:

$$p(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2$$

f(1) = 2 por dato

Para f ‘ (1) despejamos:

$$\begin{aligned}
&f(x)\, f'(x) + x = 1 \\
&f(1) f'(1) + 1 = 1 \\
&2 f'(1) = 0 \\
&f'(1) = 0
\end{aligned}$$

Para la segunda hay que derivar:

$$\begin{aligned}
&f(x)\, f'(x) + x = 1 \\
&f'(x) f'(x) + f(x) f''(x) + 1 = 0 \\
&f'(1) f'(1) + f(1) f''(1) + 1 = 0 \\
&0 + 2 f''(1) + 1 = 0 \\
&f''(1) = -1/2
\end{aligned}$$

Armamos el polinomio y queda la respuesta.

6) La integral de $\int \frac{g(x)}{x^2-1} dx$ donde $g(x)$ es la función inversa de $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ es:

- [x] $\ln\left((x+1)^2 |x-1|\right) + C$
- [ ] $\frac{3}{2}\ln|x^2-1| - \ln|x^2-1| + C$
- [ ] $\ln|x^2-1| + C$
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Resolución

La inversa de f es:

$g(x) = 3x - 1$

Entonces:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx$$

que se resuelve aplicando fracciones:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx = \int \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}dx = \int \frac{A}{x+1}dx + \int \frac{B}{x-1}dx =$$

Despejando, A = 2 y B = 1. Entonces:

$$\int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx = 2\ln|x+1| + \ln|x-1| + C = \ln|x+1|^2 + \ln|x-1| + C$$

7) El área encerrada entre la recta $y = x$ y la parábola que pasa por el punto (– 1, 2) y cuyas raíces son 0 y 1 es:

- [x] 4/3
- [ ] – 4/3
- [ ] 2
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Resolución

La parábola es:

$$\begin{aligned}
&y = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x-0)(x-1)\\
&2 = a(-1)(-2)\\
&2 = 2a\\
&a = 1\\
&y = x(x-1)
\end{aligned}$$

Vemos dónde se corta con la recta y = x

$$\begin{aligned}
&x(x-1) = x\\
&x = 0 \quad o \quad x = 2
\end{aligned}$$

Entonces, función techo es la recta y el piso es la parábola:

$$\int_0^2 [x-(x^2-x)]dx = \int_0^2 [2x-x^2]dx = x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = 4-8/3 = 4/3$$

8) El área encerrada entre las curvas $y = 1/x$, su recta tangente en x = 1 y la recta y = 1/4 se calcula haciendo:

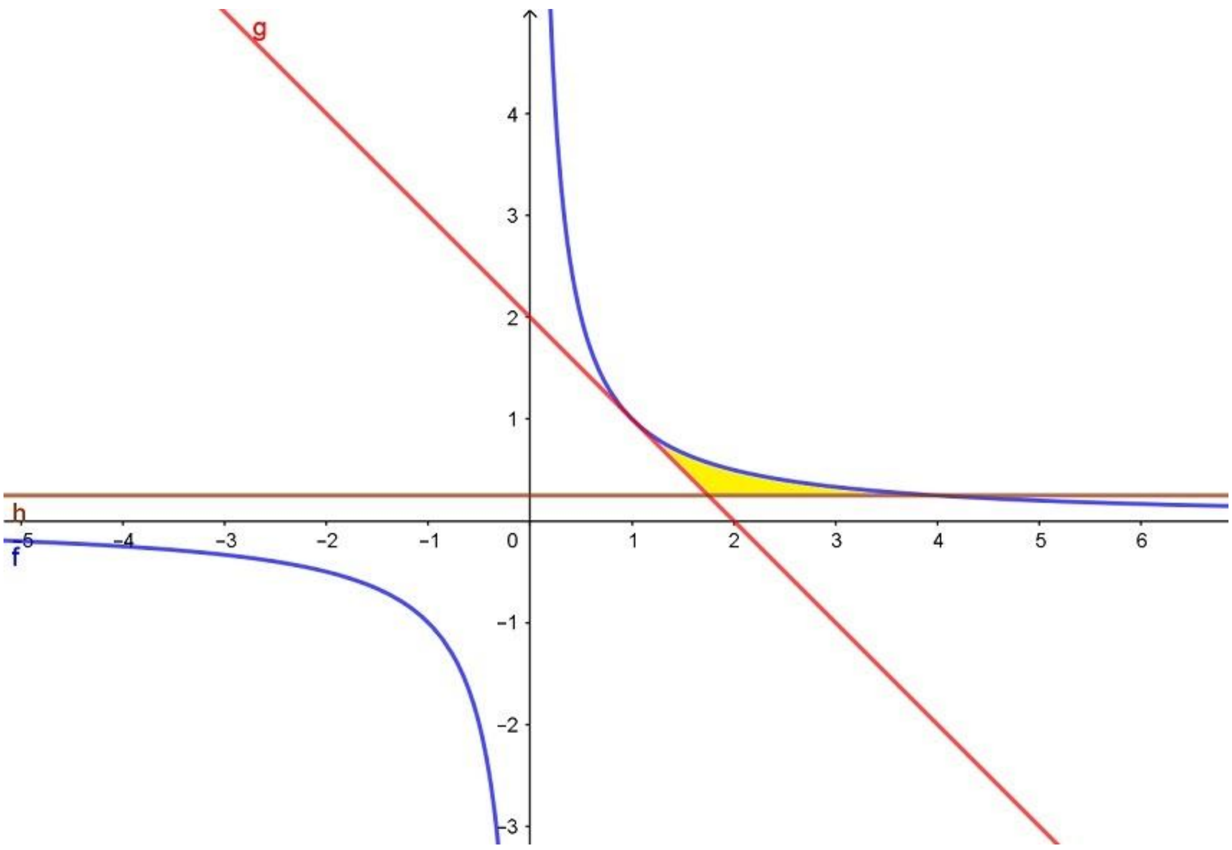
- [x] $\int_1^4 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)dx - \int_1^{7/4}\left(-x+\frac{7}{4}\right)dx$
- [ ] $\int_1^{7/4} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)dx + \int_{7/4}^{2}\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx$
- [ ] $\int_1^4 \left(\frac{1}{x}+x-\frac{7}{4}\right)dx$
- [ ] Ninguna de las otras es válida

Resolución

La recta tg a y = 1/x en x = 1 es:

$$y = y_0 + y'_0\,(x - x_0) = 1 - 1(x - 1)$$
$$y = -x + 2$$

Si graficamos las curvas queda:



La recta roja se cruza con la horizontal en

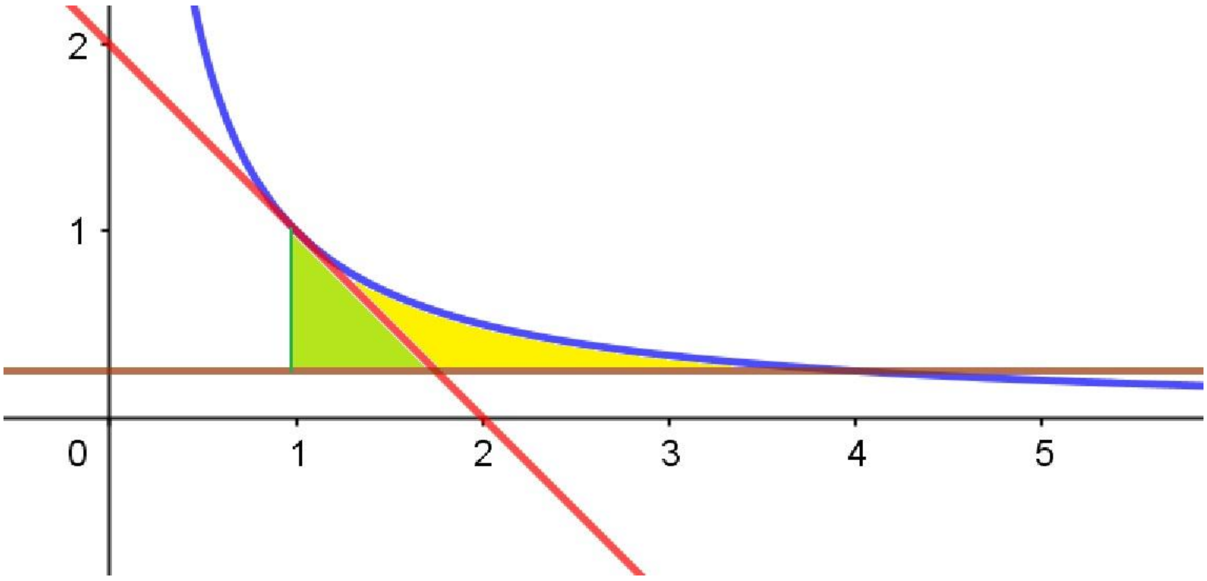
$$-x + 2 = 1/4$$
$$x = 2 - 1/4$$
$$x = 7/4$$

Y la curva azul se cruza con la horizontal en:

$$1/x = 1/4$$
$$x = 4$$

Por lo tanto nos quedan 2 áreas: la primera va desde x = 1 hasta x = 7/4, y la segunda desde x = 7/4 hasta x = 4. El techo es siempre 1/x en las dos, pero cambian los pisos.

Pero no es la única forma de calcularla, Si hacemos la integral desde x = 1 hasta x = 4, de 1/x menos 1/4 estaríamos calculando el área amarilla + la verde:



Luego restamos el área en color verde y nos queda la respuesta marcada.

9) El valor del máximo absoluto de la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$, con $-2\le x\le 3$ es:

☐ – 1 ☑ 7 ☐ 5/3 ☐ Ninguna de las otras es correcta

Resolución

Para sacar el máximo absoluto en un intervalo cerrado de una función continua hay que ver los PC y los bordes.
Para los PC derivamos:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$$
$$f'(x)=x^2-1=0$$
$$x=\pm 1$$

Nos fijamos si están dentro del intervalo que nos piden. Sí, ambos puntos son PC. Ahora evaluamos en los PC y en los bordes:

$$f(1)=\frac{1}{3}.1^3-1+1=\frac{1}{3}-1+1=\frac{1}{3}$$
$$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)+1=-\frac{1}{3}+1+1=\frac{5}{3}$$
$$f(-2)=\frac{1}{3}(-2)^3-(-2)+1=-\frac{8}{3}+2+1=\frac{1}{3}$$
$$f(3)=\frac{1}{3}.3^3-3+1=9-3+1=7$$

Vemos que el más chico es 1/3 mínimo absoluto, y el más grande un 7, valor máximo absoluto.

10) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n+3}$, donde a es el valor de la derivada en x = 0 de la función

$$f(x)=\begin{cases}\frac{sen^2(x)}{2x} & si \quad x\neq 0\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$$

☑ ☐

converge de manera absoluta

converge en forma condicional

☐ no puede calcularse porque f no es derivable en x = 0

☐ Ninguna de las otras es correcta

Resolución

Para encontrar la derivada debemos hacerlo por definición ya que es una función partida.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{sen^2(h)}{2h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen^2(h)}{2h^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)sen(h)}{2h.h}=\frac{1}{2}$$

Luego, reemplazamos la a por 1/2 y queda:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n+3}$$

que aplicando el criterio de D' Alambert o de Cauchy (más fácil) queda 1/2, como es menor que 1 converge en forma absoluta.