ANÁLIS. MAT. ING. - EXACTAS 1C 2018 UBAXXI TEMA 1 - 28-06-18	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 2 hs
	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN:
	E-MAIL:	
	TELÉFONOS part: cel:	Apellido del evaluador:

Completar con letra clara, mayúscula e imprenta

Escribir el examen con birome y letra clara. No se permite el uso de celulares. Hay un ejercicio en el reverso de la hoja para realizar allí mismo.

Ejercicios de opción múltiple.

Se debe marcar una sola respuesta en cada ejercicio. El desarrollo de estos ejercicios no será tenido en cuenta, se realizará en una hoja borrador que no se entregará para su corrección.

Ejercicio 1. Sean la función $f: R \to R$, infinitamente derivable, cuyo polinomio de Taylor de tercer orden centrado en $x = -1$ es $P(x) = x^3 - x^2 + 2$, y la función $g: R \to R$ definida por $g(x) = f(x^3)$.

a) (1 punto) La recta tangente al grafico de g en $x = -1$ es:

- [x] $y = 15x + 15$
- [ ] $y = 15x$
- [ ] $y = 2$
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

$$g(x) = f(x^3) \Rightarrow g(-1) = f((-1)^3) = f(-1) = p(-1) = 0$$

Además:

$$g'(x) = f'(x^3).3x^2 \Rightarrow g'(-1) = f'(-1).3 = 3p'(-1)$$

$$p'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow p'(-1) = 3 - (-2) = 5$$

Entonces:

$$g'(1) = 3.5 = 15$$

La recta queda:

$$y = 0 + 15(x - (-1))$$
$$y = 15x + 15$$

b) (1 punto) $g''(-1)$ es igual a:

- [ ] – 1
- [x] – 102
- [ ] 30
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

Por el ej. anterior sabíamos que

$$g'(x) = f'(x^3).3x^2$$

Volvemos a derivar y evaluamos en x = -1:

$$g''(x) = f''(x^3).3x^2.3x^2 + f'(x^3).6x$$

$$g''(-1) = f''(-1).3(-1)^2.3(-1)^2 + f'(-1).6(-1)$$
$$g''(-1) = 9f''(-1) - 6f'(-1) = 9p''(-1) - 6p'(-1)$$

Ahora derivamos el polinomio y evaluamos en x = -1.

$$p''(x) = 6x - 2 \Rightarrow p''(-1) = 6(-1) - 2 = -8$$

Por lo tanto:

$$g''(-1) = 9p''(-1) - 6p'(-1) = 9(-8) - 6.5 = -72 - 30 = -102$$

Ejercicio 2. (2 puntos) La función f definida por $y = f(x)$ que satisface $xy + 3x^2y' = 0$ cuando $f(1) = 2$ es:

- ☐ $y = 2e^{-x^3}$
- ☐ $y = x^3 + 2$
- ☐ $y = -x^3 + 2$
- ☑ Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

Planteamos:

$$xy + 3x^2y' = 0$$
$$3x^2y' = -xy$$
$$3x\frac{dy}{dx} = -y$$
$$\frac{3}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$
$$\int \frac{3}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$$
$$3\ln|y| = -\ln|x| + \ln(C)$$
$$\ln|y|^3 = \ln|x|^{-1} + \ln(C)$$
$$|y|^3 = C|1/x|$$

Ahora calculamos el valor de la constante:

Si x = 1, y = 2, entonces: C = 8.

$$y^3 = 8/x$$
$$y = \sqrt[3]{8/x} = 2/\sqrt[3]{x}$$

Ejercicios para completar

Escribir las respuestas en las líneas punteadas. El desarrollo de estos ejercicios no será tenido en cuenta. Se realizarán en una hoja borrador que no se entregará para su corrección.

Ejercicio 3. (1 punto) La integral indefinida de la función f definida por $f(x) = x^3 e^{x^2}$ es:

………

Respuesta:

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

Primero aplicamos el método de sustitución:

$$u = x^2$$
$$du = 2xdx$$
$$\frac{1}{2} du = xdx$$

Entonces:

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \int ue^u du / 2 = \frac{1}{2}\int ue^u du$$

Ahora partes:

$$f = u$$
$$f' = 1$$
$$g' = e^u$$
$$g = e^u$$

$$\frac{1}{2}\int ue^u du = \frac{1}{2}\left[ue^u - \int 1.e^u du\right] = \frac{1}{2}\left[ue^u - e^u\right] + C = \frac{1}{2}\left[x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right] + C$$

Ejercicio 4. (1 punto) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

El intervalo de convergencia es ……………..…………………………………..……………………

Respuesta:

Aplicamos el criterio de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-3x)^n}{\sqrt{2n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\left|(-3x)^n\right|}}{\sqrt[n]{\left|\sqrt{2n+1}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|-3x\right|}{1} = \left|-3x\right|$$

Pedimos que ese límite sea menor que 1.

$$|-3x| < 1$$
$$-1 < -3x < 1$$
$$-1/3 < x < 1/3$$

Ahora vemos los bordes:

Si x = -1/3 queda 1 en el numerador y vemos que por comparación con una serie de tipo p = 1/2 diverge.

En cambio si x = 1/3 queda una alternada que cumple con los criterios de Leibniz. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es: $(-1/3;1/3]$

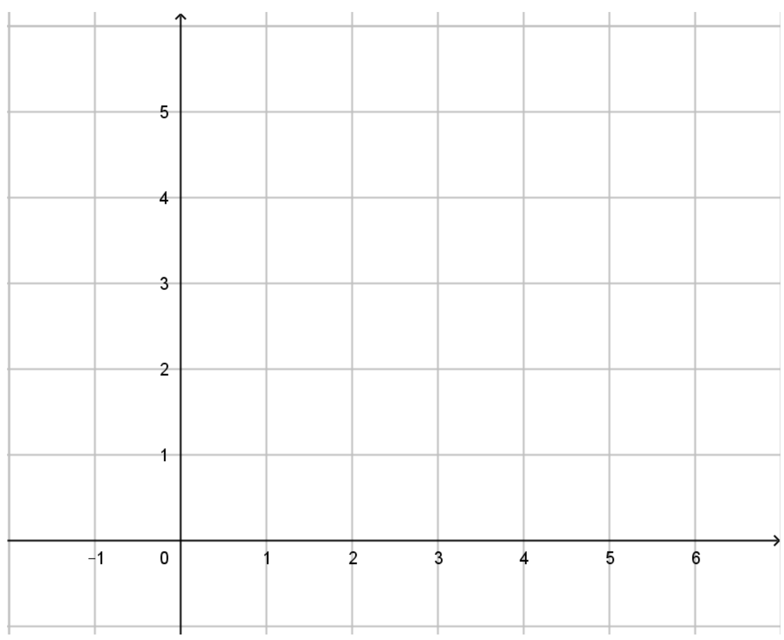
Ejercicio a desarrollar

Las respuestas deben estar justificadas, no se aceptarán cálculos dispersos. El desarrollo se debe realizar en esta misma hoja.

Ejercicio 5. Las curvas $y = \sqrt{3x+1}$, $y = \frac{3}{8}(x-5)+4$, $x = 0$ encierran una región plana. Se pide:

a) (2 puntos) Hacer el gráfico de las curvas y sombrear el área que encierran.

b) (2 puntos) Plantear la integral definida para el cálculo del área y resolverla.



Respuesta:

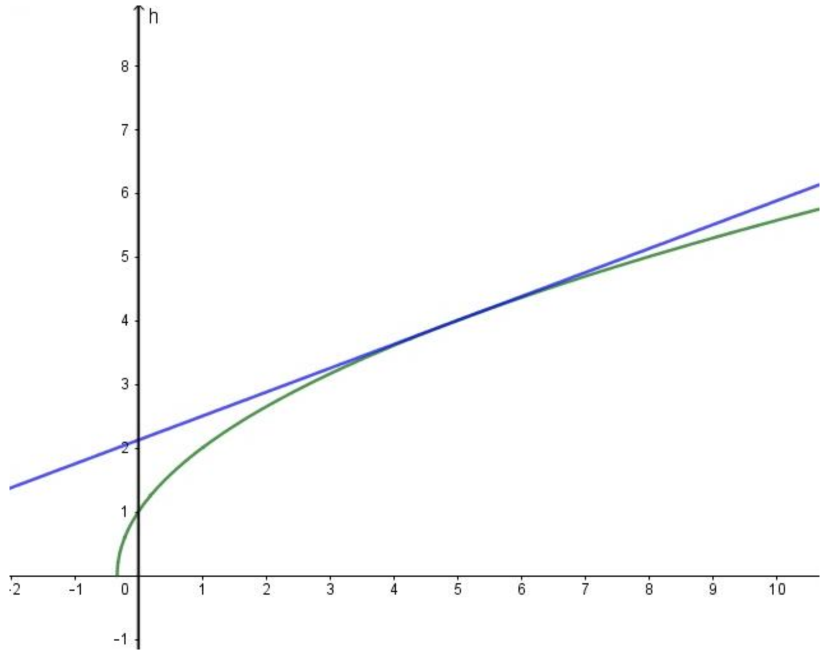
a) Para el gráfico y los límites de la integral vemos los puntos de intersección entre las dos curvas (x = 0 es el eje y). Por lo tanto:

$$\sqrt{3x+1} = \frac{3}{8}(x-5)+4$$

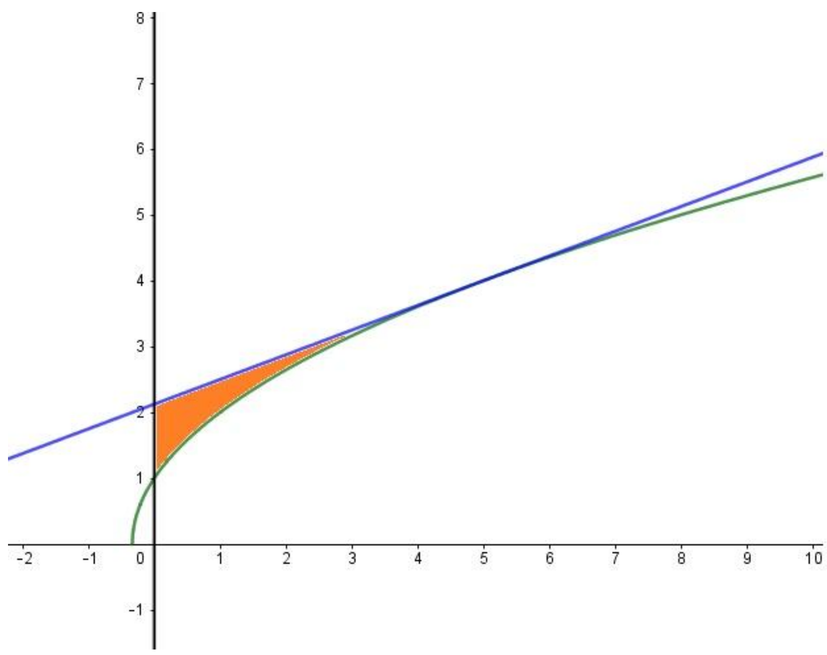
$$8\sqrt{3x+1} = 3(x-5)+32$$

$$63(3x+1) = (3x+17)^2$$

Nos queda una cuadrática que al resolverla da un solo valor: x = 5. Por lo tanto graficamos la recta $y = \frac{3}{8}(x-5)+4$, la función raíz y $x = 0$.



La región es la que pintamos en color naranja:



b) La función lineal es el techo y la raíz el piso. Por lo tanto, el planteo del área es:

$$A = \int_0^5 \left[3/8(x-5)+4-\sqrt{3x+1} \right] dx$$

Integramos y aplicamos Barrow, para integrar hay que aplicar el método de sustitución dentro de la raíz:

$$u = 3x+1$$
$$du = 3dx$$

$$A = \int_0^5 [3/8(x-5)+4]dx - \int_0^5 \sqrt{3x+1}dx = \int_0^5 [3/8(x-5)+4]dx - \int_1^{16} u^{1/2} du/3 =$$

$$\left.\frac{3}{16}x^2 - \frac{15}{8}x + 4x\right|_0^5 - \left.\frac{2}{9}u^{3/2}\right|_1^{16} = \left[\left(\frac{75}{16} - \frac{75}{8} + 20\right) - (0)\right] - \left[\left(\frac{128}{9}\right) - \left(\frac{2}{9}\right)\right] = \frac{245}{16} - \frac{126}{9} = \frac{21}{16}$$