ANÁLIS. MAT. ING. - EXACTAS 2C 2017 – R1	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 2 hs
	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN:
UBAXXI	E-MAIL:	
TEMA 2 - 04-12-17	TELÉFONOS part: cel:	Apellido del evaluador:

Completar con letra clara, mayúscula e imprenta

Escribir las respuestas en las líneas punteadas. El desarrollo de este ejercicio no será tenido en cuenta, por lo que no hay que entregarlo.

Ej 1. (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(-3x+2)$ y $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ entonces:

a) El dominio de *f* es: **…(-∞, 2/3)** ……………………………..… ………………

Como es una función logarítmica hay que pedir que el argumento sea mayor a cero, entonces resolvemos la inecuación: $-3x + 2 > 0 \rightarrow 2 > 3x \rightarrow 2/3 > x$

b) La función inversa de *g* (x) es $g^{-1}(x)$: ………………………………………..

g es una función biyectiva si la consideramos de R-{-1} a R-{2}, entonces existe la función inversa g^{-1}: R-{2}→ R-{-1} cuya formula se obtiene de la siguiente forma:

$$y = \frac{2x-1}{x+1}$$
$$y(x+1) = 2x-1$$
$$yx + y = 2x-1$$
$$yx - 2x = -1-y$$
$$x(y-2) = -1-y$$
$$x = \frac{-1-y}{y-2}$$

Entonces, $g^{-1}(x) = \dfrac{-1-x}{x-2}$.

c) La función *fog* (x) es : ……………………………………………….……………….

Para hacer la composición hay que definir el dominio, hay que pedir que *Im(g)* este incluida en el dominio de *f*. Entonces, nos queda la inecuación:

$$\frac{2x-1}{x+1} < \frac{2}{3}$$

Para resolver esta ecuación la llevamos a una desigualdad contra cero y analizamos cuándo el cociente es negativo.

$$\frac{2x-1}{x+1} - \frac{2}{3} < 0 \rightarrow \frac{6x-3-2x-2}{3(x+1)} < 0 \rightarrow \frac{4x-5}{3(x+1)} < 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando x pertenece al intervalo: (-1, 5/4). La fórmula de la composición es:

$$f(g(x)) = \ln\left(-3\frac{2x-1}{x+1}+2\right) = \ln\left(\frac{-6x+3}{x+1}+2\right) = \ln\left(\frac{-6x+3+2x+2}{x+1}\right)$$

$$fog(x) = \ln\left(\frac{-4x+5}{x+1}\right)$$

d) La ecuación de la recta tangente al gráfico de *f* en x = – 1/3 es: ……………….

La ecuación de la recta tangente es de la forma *y-f(-1/3)=f'(-1/3) (x+1/3)*. Por lo tanto, hay que encontrar *f(-1/3)* y *f ' (-1/3)*.

$$f(-1/3) = \ln(-3(-1/3)+2) = \ln(3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{-3x+2}(-3) \rightarrow f'(-1/3) = -1$$

Entonces la recta tangente es***: y – ln(3) = - (x+1/3).***

Ejercicios a desarrollar.

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos o poco claros.

Ej 2. (2 puntos) Sea $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{senx\text{ - }xcos(x)}}{2\mathrm{x}^2}+1 & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x=0 \end{cases}$ Estudiar continuidad y derivabilidad en x = 0.

Solución.
Primero hay que estudiar la continuidad, porque para que sea derivable es necesario que sea continua pero no es suficiente. Hay que verificar tres cosas:
1) existe *f(0)*. Es cierto, y vale 1 por cómo está definida la función.
2) analizar si existe el límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen(x)\text{ - }xcos(x)}}{2\mathrm{x}^2}+1\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen(x)\text{ - }xcos(x)}}{2\mathrm{x}^2}\right)+1=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{cos(x)\text{ - }(cos(x)-x\,sen(x))}}{4\mathrm{x}}\right)+1$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{x\,sen(x)}}{4\mathrm{x}}\right)+1=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen(x)+xcos(x)}}{4}\right)+1=1$$

Por lo tanto, podemos decir que el limite existe y vale 1.
3) Analizar que el límite y la imagen de la función son iguales.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$$

Por lo tanto, podemos concluir que f es continua.

Luego, tiene sentido preguntar si la función es derivable. Calculamos la derivada por definición en el único valor que nos piden: x=0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\mathrm{sen(x)\text{ - }xcos(x)}}{2\mathrm{x}^2}+1\text{ - }1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen(x)\text{ - }xcos(x)}}{2\mathrm{x}^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{cos(x)\text{ - }(cos(x)-x\,sen(x))}}{6\mathrm{x}^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{x\,sen(x)}}{6\mathrm{x}^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen(x)+xcos(x)}}{6\mathrm{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{cos(x)+cos(x)\text{ - }xsen(x)}}{6}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Entonces la derivada existe y vale 1/6.

Ej 3. Sea $f(x)=\dfrac{x^3}{12-x^2}$

a) (1 punto) Indicar dominio y raíces de la función.

Para encontrar el dominio, como es fraccionaria, igualamos el denominador a cero:

$12-x^2=0 \rightarrow 12=x^2 \rightarrow x=2\sqrt{3} \vee x=-2\sqrt{3}$

Luego el dominio es $Df=R-\{2\sqrt{3},-2\sqrt{3}\}$

Para encontrar las raíces, hay que igualar la función a cero:

$$f(x)=\frac{x^3}{12-x^2}=0 \rightarrow x=0$$

Entonces hay una sola raíz: x=0.

b) (2 puntos) Analizar asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

La asíntota vertical, si existe, tiene que estar en algún borde del dominio. En este caso hay dos bordes $x=2\sqrt{3}, x=-2\sqrt{3}$. Luego hay que analizar los limites por derecha e izquierda, en el caso que alguno de infinito entonces se puede asegurar que son asíntotas verticales.

$\lim_{x\to 2\sqrt{3}^+} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to 2\sqrt{3}^-} f(x)=+\infty$, entonces $x=2\sqrt{3}$ es asíntota vertical.

$\lim_{x\to -2\sqrt{3}^+} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to -2\sqrt{3}^+} f(x)=+\infty$, entonces $x=-2\sqrt{3}$ es asíntota vertical.

Tenemos una función fraccionaria, donde el grado del denominador es mayor al del numerador, esto implica que no hay asíntota horizontal pero sí puede haber asíntota oblicua.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{12-x^2}\frac{1}{x}\right)=-1 \quad \text{y} \quad m=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{12-x^2}\frac{1}{x}\right)=-1$$

Luego hay una única asíntota oblicua con pendiente -1. Hay que buscar la ordenada al origen:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{12-x^2}+x\right)=0$$

Luego, la asíntota oblicua es: y = - x

c) (2 puntos) Indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos relativos.

Para esto necesitamos la derivada primera:

$$f\ '(x)=\left[\frac{x^3}{12-x^2}\right]'=\frac{3x^2(12-x^2)-x^3(-2x)}{(12-x^2)^2}=\frac{x^2(36-3x^2+2x^2)}{(12-x^2)^2}$$

Igualamos a cero, y obtenemos lo puntos críticos que pueden ser o no extremos.

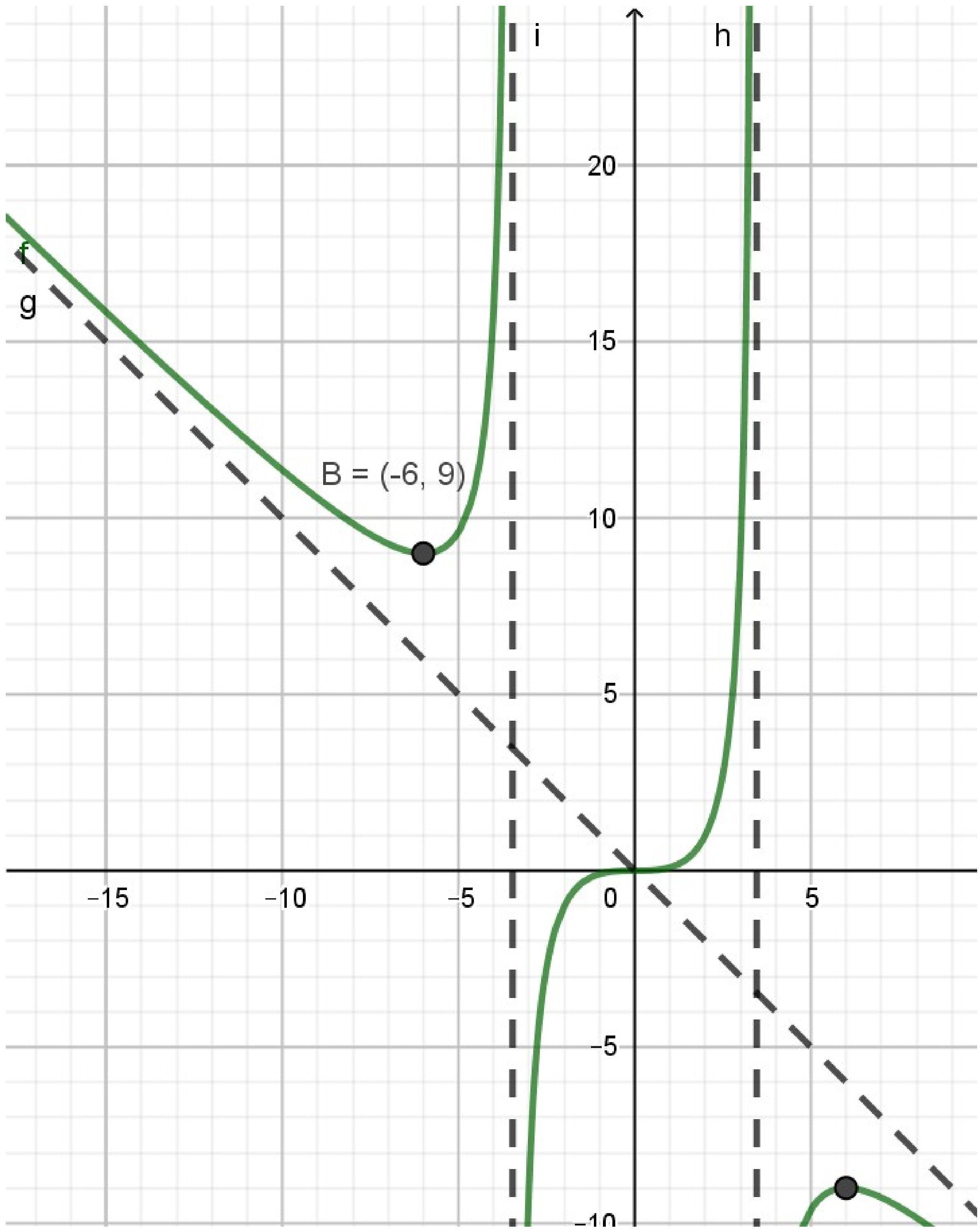
$$\frac{x^2(36-x^2)}{(12-x^2)^2}=0\rightarrow x=0\vee 36-x^2=0\rightarrow x=0\vee x=6\vee x=-6$$

Entonces armamos la tabla para analizar el signo de la derivada primera y determinar en que intervalo crece y en cual decrece y concluir donde hay extremos. Recordar que hay que incluir las asíntotas porque dividen al dominio en intervalos.

x	*(-∞, -6)*	*-6*	*(-6,-2* $\sqrt{3}$ *)*	*-2* $\sqrt{3}$	*(-2* $\sqrt{3}$ *,0)*	*0*	*(0, 2* $\sqrt{3}$ *)*	*2* $\sqrt{3}$	*(2* $\sqrt{3}$ *,6)*	*6*	*(6, +∞)*
Sgf'(x)	*-*	*0*	*+*	*No existe*	*+*	*0*	*+*	*No existe*	*+*	*0*	*-*
F(x)	*decrece*	*F(-3) min*	*crece*	*No existe*	*crece*	*nada*	*crece*	*No existe*	*crece*	*F(3) max*	*decrece*

Int crecimiento: (-6,- 2 $\sqrt{3}$)U(-2 $\sqrt{3}$,0)U(0, 2 $\sqrt{3}$)U(2 $\sqrt{3}$,6)
Int decrecimiento: (-∞, -6) U (6, +∞)
Maximo relativo: f (6) = - 9
Minimo relatico f (-6) = 9

d) (1 punto) Con la información obtenida en los puntos anteriores, realizar un gráfico aproximado de la función.



i
h
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−10
−5
5
f
g
B = (-6, 9)