

✓ Ejercicio 1

1) En una economía hipotética de dos industrias  $I_1$  y  $I_2$  la matriz de los coeficientes tecnológicos es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}. \text{ Si la demanda final es } DF = \begin{pmatrix} 330 \\ 110 \end{pmatrix}$$

- a) Hallar el nuevo vector producción  
b) Completar el nuevo cuadro

a) El vector producción se encuentra resolviendo la siguiente ecuación matricial:  $X = (I - A)^{-1} \cdot DF$

Calculamos la matriz de Leontieff  $I - A$ , posteriormente calculamos la matriz de los requerimientos directos e indirectos  $(I - A)^{-1}$  y por último realizamos el producto indicado a fin de conocer el Producto Final correspondiente

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = I - A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \text{ Debemos encontrar } (I - A)^{-1} = \frac{1}{|I - A|} \text{adj}(I - A)$$

$$|I - A| = \begin{vmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) = \frac{36}{50} - \frac{3}{50} = \frac{33}{50} \Rightarrow |I - A| = \frac{33}{50}$$

Trasponemos la matriz  $\Rightarrow (I - A)^T = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ , hallamos su adjunta,  $\text{Adj}(I - A) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (I - A)^{-1} = \frac{1}{\frac{33}{50}} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4 \cdot 50}{33} & \frac{3 \cdot 50}{33} \\ \frac{1 \cdot 50}{33} & \frac{9 \cdot 50}{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{33} & \frac{5}{11} \\ \frac{10}{33} & \frac{15}{11} \end{pmatrix} \Rightarrow (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{40}{33} & \frac{5}{11} \\ \frac{10}{33} & \frac{15}{11} \end{pmatrix}$$

$$X = (I - A)^{-1} \cdot DF \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{40}{33} & \frac{5}{11} \\ \frac{10}{33} & \frac{15}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 330 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{33} \cdot 330 + \frac{5}{11} \cdot 110 \\ \frac{10}{33} \cdot 330 + \frac{15}{11} \cdot 110 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 450 \\ 250 \end{pmatrix}$$

b) La nueva tabla es

|       | $I_1$                         | $I_2$                         | DF  | PT  |
|-------|-------------------------------|-------------------------------|-----|-----|
| $I_1$ | $\frac{1}{10} \cdot 450 = 45$ | $\frac{3}{10} \cdot 250 = 75$ | 330 | 450 |
| $I_2$ | $\frac{1}{5} \cdot 450 = 90$  | $\frac{1}{5} \cdot 250 = 50$  | 110 | 250 |
| VA    | 315                           | 125                           | 440 | ×   |
| PT    | 450                           | 250                           | ×   | 700 |

✓ Ejercicio 2

Sean las matrices  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  e  $I \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$

- a) Hallar la matriz  $P^{-1}$   
b) Hallar la matriz  $X \in \mathfrak{R}^{2 \times 2} / P \cdot X + 3M = I$

a)  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 1 \Rightarrow |P| = 1$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj } P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \text{Adj } P = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b)  $P \cdot X + 3M = I \Rightarrow X = P^{-1}(I - 3M)$  ✨

Reemplazamos en la expresión ✨

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - (-3) & 0 - 0 \\ 0 - 3 & 1 - 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + (-1)(-3) & 4 \cdot 0 + (-1)(-5) \\ -3 \cdot 4 + 1(-3) & -3 \cdot 0 + 1(-5) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 19 & 5 \\ -15 & -5 \end{pmatrix}$$

✓ Ejercicio 3

Sabiendo que  $P, Q, T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , tales que  $|P|=3, |Q|=2, |T|=5$ . Si  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / P \cdot M \cdot Q = T$  entonces:

|   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> a) $M = Q^{-1} \cdot T \cdot P^{-1}$ y $ M  = 30$          | <input type="checkbox"/> b) $M = Q^{-1} \cdot P^{-1} \cdot T$ y $ M  = 30$          |
| <input type="checkbox"/> c) $M = Q^{-1} \cdot T \cdot P^{-1}$ y $ M  = \frac{5}{6}$ | <input type="checkbox"/> d) $M = P^{-1} \cdot T \cdot Q^{-1}$ y $ M  = \frac{5}{6}$ |

Resolvemos la ecuación

$$P \cdot M \cdot Q = T$$

$$P^{-1} \cdot (P \cdot M \cdot Q) = P^{-1} \cdot T \quad \text{Multiplico miembro a miembro por la izquierda por la inversa de } P$$

$$(P^{-1} \cdot P) \cdot M \cdot Q = P^{-1} \cdot T \quad \text{Aplico propiedad asociativa}$$

$$I \cdot M \cdot Q = P^{-1} \cdot T \quad \text{Por definición de inversa}$$

$$M \cdot Q = P^{-1} \cdot T \quad \text{Por se } I \text{ neutro de la multiplicación de matrices}$$

$$(M \cdot Q) \cdot Q^{-1} = P^{-1} \cdot T \cdot Q^{-1} \quad \text{Multiplico miembro a miembro por la izquierda por la inversa de } Q$$

$$M \cdot (Q \cdot Q^{-1}) = P^{-1} \cdot T \cdot Q^{-1} \quad \text{Aplico propiedad asociativa}$$

$$M \cdot I = P^{-1} \cdot T \cdot Q^{-1} \quad \text{Por definición de inversa}$$

$$M = P^{-1} \cdot T \cdot Q^{-1} \quad \text{Por se } I \text{ neutro de la multiplicación de matrices}$$

$$\therefore \boxed{M = P^{-1} \cdot T \cdot Q^{-1}}$$

Calculamos el determinante de la matriz  $M$

$$M = P^{-1} \cdot T \cdot Q^{-1} \Rightarrow$$

$$|M| = |P^{-1} \cdot T \cdot Q^{-1}| \quad \text{Aplico determinante miembro a miembro en la igualdad}$$

$$|M| = |P^{-1}| \cdot |T| \cdot |Q^{-1}| \quad \text{En el segundo miembro aplico la propiedad de determinante de un producto}$$

$$|M| = \frac{1}{|P|} \cdot |T| \cdot \frac{1}{|Q|} \quad \text{En el segundo miembro aplico la propiedad del determinante de la inversa de una matriz}$$

$$|M| = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \quad \text{Reemplazo por los valores del enunciado}$$

$$\therefore \boxed{|M| = \frac{5}{6}}$$

Respuesta correcta: d)

✓ Ejercicio 4

Sea la matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & k-2 & k \\ 0 & 3 & k+2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  se puede afirmar que:

|   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> a) $r(B) = 2, \forall k \in \mathfrak{R}$        | <input checked="" type="checkbox"/> b) $r(B) = 3, \forall k \in \mathfrak{R}$ |
| <input type="checkbox"/> c) $r(B) \neq 3$ porque depende del valor de $k$ | <input type="checkbox"/> d) $r(B) = 1, \forall k \in \mathfrak{R}$            |

Dada una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$  entonces  $\begin{cases} |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = n \\ \text{ó} \\ |A| = 0 \Rightarrow r(A) < n \end{cases}$

Calculamos el determinante de la matriz  $B$ .

Como es una matriz triangular superior, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & k-2 & k \\ 0 & 3 & k+2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-2) = -6 \neq 0$$

$B$  es una matriz de orden 3 y  $|B| = -6 \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3$

Respuesta correcta: b)

✓ Ejercicio 5

El o los valores de  $a, b \in \mathfrak{R}$  para que el sistema  $\begin{cases} x + 3y + az = b \\ 2x + 2y - az = 1 \\ x - y + 2z = b \end{cases}$  sea compatible indeterminado son:

|   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) $a \neq -1 \wedge b \neq \frac{1}{2}$ | <input checked="" type="checkbox"/> b) $a = -1 \wedge b = \frac{1}{2}$ |
| <input type="checkbox"/> c) $\forall a, b \in \mathfrak{R}$       | <input type="checkbox"/> d) $\nexists a, b \in \mathfrak{R}$           |

Escribimos la matriz ampliada correspondiente al sistema dado y luego aplicamos triangulamos la matriz utilizando el método de eliminación gaussiana

$$\begin{cases} x + 3y + az = b \\ 2x + 2y - az = 1 \\ x - y + 2z = b \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & b \\ 2 & 2 & -a & 1 \\ 1 & -1 & 2 & b \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & b \\ 2 & 2 & -a & 1 \\ 1 & -1 & 2 & b \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1, F_3 - F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & b \\ 0 & -4 & -3a & 1 - 2b \\ 0 & -4 & 2 - a & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & b \\ 0 & -4 & -3a & 1 - 2b \\ 0 & 0 & 2 + 2a & -1 + 2b \end{array} \right)$$

El ejercicio pide que el sistema sea compatible indeterminado por lo tanto tiene infinitas soluciones, para que esto suceda debe anularse la última fila

$$SCI \Leftrightarrow (2 + 2a = 0 \wedge -1 + 2b = 0) \therefore \boxed{SCI \Leftrightarrow \left( a = -1 \wedge b = \frac{1}{2} \right)}$$

Respuesta correcta: b)

✓ **Ejercicio 6**

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz ortogonal y simétrica, se cumple que:

|  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> a) $A$ es involutiva  | <input type="checkbox"/> b) $ A  = 1$                             |
| <input type="checkbox"/> c) $A$ es idempotente | <input type="checkbox"/> d) Ninguna de las anteriores es correcta |

Si la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz ortogonal y simétrica entonces la matriz cumple con las siguientes condiciones ( $A$  es ortogonal  $\Leftrightarrow A.A^T = I$ )  $\wedge$  ( $A$  es simétrica  $\Leftrightarrow A = A^T$ )

Como  $A$  es ortogonal  $\Rightarrow A \cdot \underbrace{A^T}_{\substack{A^T=A \\ \text{porque} \\ A \text{ es simétrica}}} = I \Rightarrow A.A = I \Rightarrow A^2 = I \Rightarrow A \text{ es involutiva}$

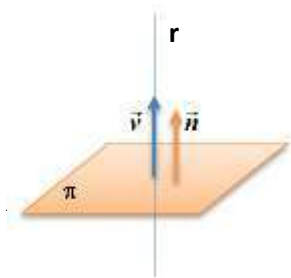
**Respuesta correcta: a)**

✓ Ejercicio 7

Sea la recta  $r$  que pasa por los puntos  $A = (2; 2; 0)$  y  $B = (0; 2; -1)$  entonces la ecuación del plano  $\pi$  que pasa por  $C = (2; 3; -1)$  y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $B$  es:

|  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> a) $\pi : (2; 3; 1) + \lambda(-2; 0; -1)$ | <input type="checkbox"/> b) $\pi : (-2; 0; -1) + \lambda(2; 3; -1)$ |
| <input type="checkbox"/> c) $\pi : 2x + 3y - z + 3 = 0$            | <input checked="" type="checkbox"/> d) $\pi : -2x - z + 3 = 0$      |

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0; 2; -1) - (2; 2; 0) = (-2; 0; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2; 0; -1)$$



$$\pi \perp r \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{v}$$

$$(x - 2; y - 3; z + 1) \cdot (-2; 0; -1) = 0$$

$$(x - 2) \cdot (-2) + (y - 3) \cdot 0 + (z + 1) \cdot (-1) = 0$$

$$-2x + 4 - z - 1 = 0$$

$$\pi : -2x - z + 3 = 0$$

Respuesta correcta: d)

✓ **Ejercicio 8**

Sea  $C = \begin{pmatrix} m & p \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  sabiendo que  $|C| = 5$ , los determinantes:  $|-2C^T|$  y  $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2m & 2p \end{vmatrix}$  son respectivamente:

|  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> a) $-10, -20$           | <input type="checkbox"/> b) $10, -20$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> c) $20, -20$ | <input type="checkbox"/> d) $-10, 20$ |

Sabemos por el enunciado que  $C = \begin{pmatrix} m & p \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = 5 \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} m & p \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$$|-2C^T| \underset{|kA|=k^n|A|}{=} (-2)^2 |C^T| \underset{|C^T|=|C|}{=} (-2)^2 |C| \underset{|C|=5}{=} 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow \boxed{|-2C^T| = 20}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2m & 2p \end{vmatrix} \underset{1}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2m & 2p \end{vmatrix} \underset{2}{=} 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & p \end{vmatrix} \underset{3}{=} 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} m & p \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{4}{=} 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot |C| \underset{5}{=} 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 5 = -20 \Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2m & 2p \end{vmatrix} = -20}$$

- 1) *Factoreamos la primera fila del determinante*
- 2) *Factoreamos la segunda fila del determinante*
- 3) *La matriz que resulta del factoro de ambas filas tiene las filas permutadas*
- 4) *Reemplazamos por el determinante de C*
- 5) *Reemplazamos por el valor del determinante de C y operamos*

**Respuesta correcta: c)**



✓ Ejercicio 9

El conjunto de los  $m \in \mathbb{R}$  tales que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2m & 0 & m \\ 0 & m-1 & 0 \\ m & -1 & m \end{pmatrix}$  sea regular es:

|  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> a) $\emptyset$  | <input checked="" type="checkbox"/> b) $\mathbb{R} - \{0,1\}$ |
| <input type="checkbox"/> c) $\mathbb{R}$ | <input type="checkbox"/> d) $\{0,1\}$                         |

$A$  es regular  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Calculamos el determinante de  $A$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2m & 0 & m \\ 0 & m-1 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 2m & m \\ m & m \end{vmatrix} = (m-1)(2m^2 - m^2) = (m-1)m^2 \Rightarrow |A| = (m-1)m^2$$

Los valores de  $m \in \mathbb{R}$  que anulan el determinante son  $m=0 \vee m=1$

Pero necesitamos que la matriz sea regular, o sea que su determinante no se anule entonces

$A$  es regular  $\Leftrightarrow m \neq 0 \wedge m \neq 1$  Expresamos la solución en lenguaje conjuntista:

$A$  es regular  $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \{0,1\}$

Respuesta correcta: b)

✓ Ejercicio 10

La ecuación simétrica de la recta  $r$  que pasa por el punto  $P = (5; 2; 1)$  y es paralela a la recta de ecuación  $s : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{4}$  es:

|  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> a) $r : \frac{x-5}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{4}$ | <input type="checkbox"/> b) $r : \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{2} = z-4$       |
| <input type="checkbox"/> c) $r : (x; y; z) = (5; 2; 1) + \lambda(-1; 2; 4)$      | <input type="checkbox"/> d) $r : (x; y; z) = (-1; 2; 4) + \lambda(5; 2; 1)$ |

La expresión simétrica de una recta que pasa por  $A = (x_0; y_0; z_0)$  y tiene vector director  $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$  es:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

De la recta  $s$  dato del problema obtenemos el vector director

$$s : \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{4} \Rightarrow \vec{v}_s = (-1; 2; 4)$$

$r \parallel s \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_s$  reemplazando se obtiene la recta pedida

$$r : \frac{x-5}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{4}$$

Respuesta correcta: a)