✓ ***Ejercicio 1***

***1) En una economía hipotética de dos industrias $I_1$ y $I_2$ la matriz de los coeficientes tecnológicos es*** $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$. ***Si la demanda final es*** $DF=\begin{pmatrix}330\\110\end{pmatrix}$

***a) Hallar el nuevo vector producción***
***b) Completar el nuevo cuadro***

***a) El vector producción se encuentra resolviendo la siguiente ecuación matricial:*** $X=(I-A)^{-1}.DF$

***Calculamos la matriz de Leontieff*** $I-A$ ***, posteriormente calculamos la matriz de los requerimientos directos e indirectos*** $(I-A)^{-1}$ ***y por último realizamos el producto indicado a fin de conocer el Producto Final correspondiente***

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\Rightarrow I-A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\boxed{I-A=\begin{pmatrix}\frac{9}{10} & -\frac{3}{10}\\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}}$$

***Debemos encontrar*** $\boxed{(I-A)^{-1}=\frac{1}{|I-A|}adj(I-A)}$

$$|I-A|=\begin{vmatrix}\frac{9}{10} & -\frac{3}{10}\\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{vmatrix}=\frac{9}{10}.\frac{4}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right).\left(-\frac{3}{10}\right)=\frac{36}{50}-\frac{3}{50}=\frac{33}{50}\quad\Rightarrow\quad\boxed{|I-A|=\frac{33}{50}}$$

***Trasponemos la matriz*** $\Rightarrow(I-A)^T=\begin{pmatrix}\frac{9}{10} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{3}{10} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$, ***hallamos su adjunta,*** $\boxed{Adj(I-A)=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{9}{10}\end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow(I-A)^{-1}=\frac{1}{\frac{33}{50}}\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{9}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\cdot\frac{50}{33} & \frac{3}{10}\cdot\frac{50}{33}\\ \frac{1}{5}\cdot\frac{50}{33} & \frac{9}{10}\cdot\frac{50}{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{40}{33} & \frac{5}{11}\\ \frac{10}{33} & \frac{15}{11}\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{40}{33} & \frac{5}{11}\\ \frac{10}{33} & \frac{15}{11}\end{pmatrix}}$$

$$X=\ (I-A)^{-1}\cdot DF\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{40}{33} & \frac{5}{11}\\ \frac{10}{33} & \frac{15}{11}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}330\\110\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{40}{33}.330+\frac{5}{11}.110\\ \frac{10}{33}.330+\frac{15}{11}.110\end{pmatrix}\qquad\boxed{X=\begin{pmatrix}450\\250\end{pmatrix}}$$

***b) La nueva tabla es***

| | $I_1$ | $I_2$ | $DF$ | $PT$ |
|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | $\frac{1}{10}.450=45$ | $\frac{3}{10}.250=75$ | 330 | 450 |
| $I_2$ | $\frac{1}{5}.450=90$ | $\frac{1}{5}.250=50$ | 110 | 250 |
| $VA$ | 315 | 125 | 440 | ✕ |
| $PT$ | 450 | 250 | ✕ | 700 |

✓ *Ejercicio 2*

*Sean las matrices* $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ *e* $I\in\Re^{2x2}$

*a) Hallar la matriz* $P^{-1}$

*b) Hallar la matriz* $X\in\Re^{2x2}\ /\ P\cdot X+3M=I$

*a)* $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$$|P|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1.4-3.1=1\Rightarrow \boxed{|P|=1}$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow P^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{Adj\,P=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}Adj\,P=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}}$$

*b)* $P\cdot X+3M=I \quad\Rightarrow \boxed{X=P^{-1}\left(I-3M\right)}$ ⁂

*Reemplazamos en la expresión* ⁂

$$X=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-(-3) & 0-0\\ 0-3 & 1-6\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ -3 & -5\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}4.4+(-1)(-3) & 4.0+(-1)(-5)\\ -3.4+1(-3) & -3.0+1(-5)\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}19 & 5\\ -15 & -5\end{pmatrix}}$$

✓ *Ejercicio 3*

*Sea la matriz* $B=\begin{pmatrix}1 & k-2 & k\\ 0 & 3 & k+2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ *se puede afirmar que:*

| | |
|---|---|
| ☐ *a)* $r(B)=2,\forall k\in\Re$ | ☐ *b)* $r(B)=3,\forall k\in\Re$ |
| ☐ *c)* $r(B)\neq 3$ *porque depende del valor de k* | ☐ *d)* $r(B)=1,\forall k\in\Re$ |

*Dada una matriz cuadrada A de orden n entonces* $\begin{cases}|A|\neq 0\Rightarrow r(A)=n\\ \quad\quad ó\\ |A|=0\Rightarrow r(A)<n\end{cases}$

*Calculamos el determinante de la matriz B.*

*Como es una matriz triangular superior, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal*

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & k-2 & k\\ 0 & 3 & k+2\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=1.3.(-2)=-6\neq 0$$

$B$ *es una matriz de orden* $3$ *y* $|B|=-6\neq 0 \Rightarrow \boxed{r(B)=3}$

*Respuesta correcta: b)*

✓ ***Ejercicio 4***

*El o los valores de* $a,b\in\Re$ *para que el sistema* $\begin{cases} x+3y+az=b \\ 2x+2y-az=1 \\ x-\ y+2z=b \end{cases}$ *sea compatible indeterminado son:*

| | |
|---|---|
| ☐ *a)* $a\neq-1\wedge\ b\neq\frac{1}{2}$ | ☐ *b)* $a=-1\wedge\ b=\frac{1}{2}$ |
| ☐ *c)* $\forall\, a,b\in\Re$ | ☐ *d)* $\nexists\, a,b\in\Re$ |

***Escribimos la matriz ampliada correspondiente al sistema dado y luego aplicamos triangulamos la matriz utilizando el método de eliminación gaussiana***

$$\begin{cases} x+3y+az=b \\ 2x+2y-az=1 \\ x-\ y+2z=b \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & a & b \\ 2 & 2 & -a & 1 \\ 1 & -1 & 2 & b \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & a & b \\ 2 & 2 & -a & 1 \\ 1 & -1 & 2 & b \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & a & b \\ 0 & -4 & -3a & 1-2b \\ 0 & -4 & 2-a & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & a & b \\ 0 & -4 & -3a & 1-2b \\ 0 & 0 & 2+2a & -1+2b \end{array}\right)$$

***El ejercicio pide que el sistema sea compatible indeterminado por lo tanto tiene infinitas soluciones, para que esto suceda debe anularse la última fila***

$$SCI\Leftrightarrow\left(2+2a=0\wedge-1+2b=0\right)\therefore\ \boxed{SCI\Leftrightarrow\left(a=-1\wedge b=\frac{1}{2}\right)}$$

***Respuesta correcta: b)***

✓ *Ejercicio 5*

**Sabiendo que $P,Q,T \in \Re^{2x2}$, tales que $|P|=3, |Q|=2, |T|=5$. Si $M \in \Re^{2x2}$ / $P.M.Q=T$ entonces:**

| | |
|---|---|
| ☐ a) $M=Q^{-1}\cdot T\cdot P^{-1}$ y $\lvert M\rvert=30$ | ☐ b) $M=Q^{-1}\cdot P^{-1}\cdot T$ y $\lvert M\rvert=30$ |
| ☐ c) $M=Q^{-1}\cdot T\cdot P^{-1}$ y $\lvert M\rvert=5/6$ | ☐ d) $M=P^{-1}\cdot T\cdot Q^{-1}$ y $\lvert M\rvert=5/6$ |

***Resolvemos la ecuación***

$$P.M.Q=T$$

$P^{-1}.(P.M.Q)=P^{-1}.T$ *Multiplico miembro a miembro por la izquierda por la inversa de P*

$(P^{-1}.P).M.Q=P^{-1}.T$ *Aplico propiedad asociativa*

$I.M.Q=P^{-1}.T$ *Por definición de inversa*

$M.Q=P^{-1}.T$ *Por se I neutro de la multiplicación de matrices*

$(M.Q).Q^{-1}=P^{-1}.T.Q^{-1}$ *Multiplico miembro a miembro por la izquierda por la inversa de Q*

$M.(Q.Q^{-1})=P^{-1}.T.Q^{-1}$ *Aplico propiedad asociativa*

$M.I=P^{-1}.T.Q^{-1}$ *Por definición de inversa*

$M=P^{-1}.T.Q^{-1}$ *Por se I neutro de la multiplicación de matrices*

$$\therefore \boxed{M=P^{-1}.T.Q^{-1}}$$

***Calculamos el determinante de la matriz M***

$M=P^{-1}.T.Q^{-1} \Rightarrow$

$|M|=|P^{-1}.T.Q^{-1}|$ *Aplico determinante miembro a miembro en la igualdad*

$|M|=|P^{-1}|.|T|.|Q^{-1}|$ *En el segundo miembro aplico la propiedad de determinante de un producto*

$|M|=\dfrac{1}{|P|}\cdot|T|\cdot\dfrac{1}{|Q|}$ *En el segundo miembro aplico la propiedad del determinante de la inversa de una matriz*

$|M|=\dfrac{1}{3}\cdot 5\cdot\dfrac{1}{2}$ *Reemplazo por los valores del enunciado*

$$\therefore \boxed{|M|=\frac{5}{6}}$$

***Respuesta correcta: d)***

✓ *Ejercicio 6*

*La ecuación simétrica de la recta r que pasa por el punto* $P=(5;2;1)$ *y es paralela a la recta de ecuación* $s:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{4}$ *es:*

| | |
|---|---|
| ☐ a) $r:\frac{x-5}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{4}$ | ☐ b) $r:\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{2}=z-4$ |
| ☐ c) $r:(x;y;z)=(5;2;1)+\lambda(-1;2;4)$ | ☐ d) $r:(x;y;z)=(-1;2;4)+\lambda(5;2;1)$ |

*La expresión simétrica de una recta que pasa por* $A=(x_0;y_0;z_0)$ *y tiene vector director* $\vec{v}=(v_x;v_y;v_z)$ *es:*

$$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z}$$

*De la recta s dato del problema obtenemos el vector director*

$$s:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{4}\Rightarrow \boxed{\vec{v}_s=(-1;2;4)}$$

$r \parallel s \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_s$ *reemplazando se obtiene la recta pedida* $\boxed{r:\frac{x-5}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{4}}$

*Respuesta correcta: a)*

✓ ***Ejercicio 7***

***Sea*** $C=\begin{pmatrix} m & p \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ***sabiendo que*** $|C|=5$***, los determinantes:*** $|-2C^T|$ ***y*** $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2m & 2p \end{vmatrix}$ ***son respectivamente:***

| | |
|---|---|
| ☐ ***a)*** $-10,-20$ | ☐ ***b)*** $10,-20$ |
| ☐ ***c)*** $20,-20$ | ☐ ***d)*** $-10,20$ |

***Sabemos por el enunciado que*** $C=\begin{pmatrix} m & p \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C|=5 \Rightarrow |C|=\begin{vmatrix} m & p \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5$

$$|-2C^T| \underset{|kA|=k^n|A|}{=} (-2)^2|C^T| \underset{|C^T|=|C|}{=} (-2)^2|C| \underset{|C|=5}{=} 4.5=20 \Rightarrow \boxed{|-2C^T|=20}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2m & 2p \end{vmatrix} \underset{1}{=} 2.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2m & 2p \end{vmatrix} \underset{2}{=} 2.2.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & p \end{vmatrix} \underset{3}{=} 2.2.(-1).\begin{vmatrix} m & p \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{4}{=} 2.2.(-1).|C| \underset{5}{=} 2.2.(-1).5=-20 \Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2m & 2p \end{vmatrix}=-20}$$

***1) Factoreamos la primera fila del determinante***

***2) Factoreamos la segunda fila del determinante***

***3) La matriz que resulta del factoreo de ambas filas tiene las filas permutadas***

***4) Reemplazamos por el determinante de C***

***5) Reemplazamos por el valor del determinante de C y operamos***

***Respuesta correcta: c)***

✓ *Ejercicio 8*

*El conjunto de los* $m \in \Re$ *tales que la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2m & 0 & m \\ 0 & m-1 & 0 \\ m & -1 & m \end{pmatrix}$ *sea regular es:*

| | |
|---|---|
| ☐ *a)* $\varnothing$ | ☐ *b)* $\Re - \{0,1\}$ |
| ☐ *c)* $\Re$ | ☐ *d)* $\{0,1\}$ |

$A$ *es regular* $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

*Calculamos el determinante de A*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2m & 0 & m \\ 0 & m-1 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 2m & m \\ m & m \end{vmatrix} = (m-1)(2m^2 - m^2) = (m-1)m^2 \Rightarrow \boxed{|A| = (m-1)m^2}$$

*Los valores de* $m \in \Re$ *que anulan el determinante son* $m = 0 \vee m = 1$

*Pero necesitamos que la matriz sea regular, o sea que su determinante no se anule entonces*

$\boxed{A \text{ es regular } \Leftrightarrow m \neq 0 \wedge m \neq 1}$ *Expresamos la solución en lenguaje conjuntista:*

$\boxed{A \text{ es regular } \Leftrightarrow m \in \Re - \{0,1\}}$

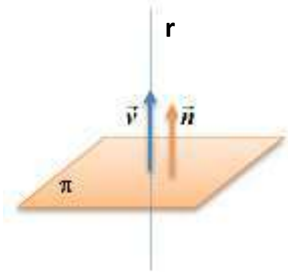
*Respuesta correcta: b)*

✓ *Ejercicio 9*

*Sea la recta $r$ que pasa por los puntos $A=(2;2;0)$ y $B=(0;2;-1)$ entonces la ecuación del plano $\pi$ que pasa por $C=(2;3;-1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B es:*

| | |
|---|---|
| ☐ *a)* $\pi:(2;3;1)+\lambda(-2;0;-1)$ | ☐ *b)* $\pi:(-2;0;-1)+\lambda(2;3;-1)$ |
| ☐ *c)* $\pi:2x+3y-z+3=0$ | ☐ *d)* $\pi:-2x-z+3=0$ |

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0;2;-1)-(2;2;0)=(-2;0;-1)\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{AB}=(-2;0;-1)}$$




$$\pi\perp r\Rightarrow\vec{n}\parallel\vec{v}$$

$$(x-2;y-3;z+1).(-2;0;-1)=0$$
$$(x-2).(-2)+\cancel{(y-3).0}+(z+1).(-1)=0$$
$$-2x+4-z-1=0$$
$$\boxed{\pi:-2x-z+3=0}$$

*Respuesta correcta: d)*

✓ ***Ejercicio 10***

*Sea* $A \in \Re^{nxn}$ *es una matriz ortogonal y simétrica, se cumple que:*

| | |
|---|---|
| ☐ *a) A es involutiva* | ☐ *b)* $\lvert A \rvert = 1$ |
| ☐ *c) A es idempotente* | ☐ *d) Ninguna de las anteriores es correcta* |

*Si la matriz* $A \in \Re^{nxn}$ *es una matriz ortogonal y simétrica entonces la matriz cumple con las siguientes condiciones* $\left( A \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow A.A^T = I \right) \wedge \left( A \text{ es simétrica} \Leftrightarrow A = A^T \right)$

$$\text{Como } A \text{ es ortogonal} \Rightarrow A \,.\, \underbrace{A^T}_{\substack{A^T = A \\ \text{porque} \\ A \text{ es simétrica}}} = I \Rightarrow A.A = I \Rightarrow \boxed{A^2 = I \Rightarrow A \text{ es involutiva}}$$

***Respuesta correcta: a)***