

20 - 09 - 2019

TEMA 3

✓ Ejercicio 1

1) En una economía hipotética de dos industrias A y B la matriz de los coeficientes tecnológicos es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}. \text{ Si la demanda final es } DF = \begin{pmatrix} 153 \\ 238 \end{pmatrix}$$

- a) Hallar el nuevo vector producción
b) Completar el nuevo cuadro

a) El vector producción se encuentra resolviendo la siguiente ecuación matricial: $X = (I - A)^{-1} \cdot DF$

Calculamos la matriz de Leontieff $I - A$, posteriormente calculamos la matriz de los requerimientos directos e indirectos $(I - A)^{-1}$ y por último realizamos el producto indicado a fin de conocer el Producto Final correspondiente

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = I - A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \text{ Debemos encontrar } (I - A)^{-1} = \frac{1}{|I - A|} \text{adj}(I - A)$$

$$|I - A| = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{8} \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} - \left(-\frac{3}{16}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{15}{32} - \frac{9}{128} = \frac{51}{128} \Rightarrow |I - A| = \frac{51}{128}$$

Trasponemos la matriz $\Rightarrow (I - A)^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$, hallamos su adjunta, $\text{Adj}(I - A) = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (I - A)^{-1} = \frac{1}{\frac{51}{128}} \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5 \cdot 128}{8 \cdot 51} & \frac{3 \cdot 128}{8 \cdot 51} \\ \frac{3 \cdot 128}{16 \cdot 51} & \frac{3 \cdot 128}{4 \cdot 51} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{51} & \frac{16}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{32}{17} \end{pmatrix} \Rightarrow (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{80}{51} & \frac{16}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{32}{17} \end{pmatrix}$$

$$X = (I - A)^{-1} \cdot DF \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{80}{51} & \frac{16}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{32}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 153 \\ 238 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{51} \cdot 153 + \frac{16}{17} \cdot 238 \\ \frac{8}{17} \cdot 153 + \frac{32}{17} \cdot 238 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 464 \\ 520 \end{pmatrix}$$

b) La nueva tabla es

	A	B	DF	PT
A	$\frac{1}{4} \cdot 464 = 116$	$\frac{3}{8} \cdot 520 = 195$	153	464
B	$\frac{3}{16} \cdot 464 = 87$	$\frac{3}{8} \cdot 520 = 195$	238	520
VA	261	130	391	×
PT	464	520	×	984

✓ Ejercicio 2

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $I \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$

- a) Hallar la matriz A^{-1}
b) Hallar la matriz $X \in \mathfrak{R}^{2 \times 2} / A \cdot X + 2B = I$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow |A| = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot X + 2B = I \Rightarrow X = A^{-1}(I - 2B)$ ✨

Reemplazamos en la expresión ✨

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-4 & 0-2 \\ 0-0 & 1-6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-3) + (-2) \cdot 0 & 5 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-5) \\ -2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 & -2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-5) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

✓ Ejercicio 3

Sabiendo que $A, B, C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, tales que $|A|=2, |B|=3, |C|=4$. Si $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A \cdot M \cdot B = C$ entonces:

<input type="checkbox"/> a) $M = B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}$ y $ M = \frac{2}{3}$	<input type="checkbox"/> b) $M = B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}$ y $ M = 24$
<input type="checkbox"/> c) $M = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ y $ M = \frac{2}{3}$	<input type="checkbox"/> d) $M = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$ y $ M = 24$

Resolvemos la ecuación

$$A \cdot M \cdot B = C$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot M \cdot B) = A^{-1} \cdot C \quad \text{Multiplico miembro a miembro por la izquierda por la inversa de P}$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot M \cdot B = A^{-1} \cdot C \quad \text{Aplico propiedad asociativa}$$

$$I \cdot M \cdot B = A^{-1} \cdot C \quad \text{Por definición de inversa}$$

$$M \cdot B = A^{-1} \cdot C \quad \text{Por se I neutro de la multiplicación de matrices}$$

$$(M \cdot B) \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \quad \text{Multiplico miembro a miembro por la izquierda por la inversa de Q}$$

$$M \cdot (B \cdot B^{-1}) = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \quad \text{Aplico propiedad asociativa}$$

$$M \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \quad \text{Por definición de inversa}$$

$$M = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \quad \text{Por se I neutro de la multiplicación de matrices}$$

$$\therefore \boxed{M = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$$

Calculamos el determinante de la matriz M

$$M = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$|M| = |A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}| \quad \text{Aplico determinante miembro a miembro en la igualdad}$$

$$|M| = |A^{-1}| \cdot |C| \cdot |B^{-1}| \quad \text{En el segundo miembro aplico la propiedad de determinante de un producto}$$

$$|M| = \frac{1}{|A|} \cdot |C| \cdot \frac{1}{|B|} \quad \text{En el segundo miembro aplico la propiedad del determinante de la inversa de una matriz}$$

$$|M| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \quad \text{Reemplazo por los valores del enunciado}$$

$$\therefore \boxed{|M| = \frac{2}{3}}$$

Respuesta correcta: c)

✓ Ejercicio 4

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n+1 & -1 & 0 \\ n & n-1 & 5 \end{pmatrix}$ se puede afirmar que:

a) $r(A) = 3, \forall n \in \mathfrak{R}$

b) $r(A) = 2, \forall n \in \mathfrak{R}$

c) $r(A) \neq 3$ porque depende del valor de n

d) $r(A) = 1, \forall n \in \mathfrak{R}$

Dada una matriz cuadrada de orden n entonces $\begin{cases} |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = n \\ \text{ó} \\ |A| = 0 \Rightarrow r(A) < n \end{cases}$

Calculamos el determinante de la matriz A .

Como es una matriz triangular inferior, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n+1 & -1 & 0 \\ n & n-1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 5 = -10 \neq 0$$

A es una matriz de orden 3 y $|A| = -10 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$

Respuesta correcta: a)

✓ Ejercicio 5

El o los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el sistema $\begin{cases} 3x + y + (\alpha + 1)z = 4 \\ -y + 3z = \beta \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$ sea compatible indeterminado

son:

<input type="checkbox"/> a) $\alpha \neq -1 \vee \beta \neq -1$	<input type="checkbox"/> b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
<input checked="" type="checkbox"/> c) $\alpha = -1 \wedge \beta = -1$	<input type="checkbox"/> d) $\nexists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Escribimos la matriz ampliada correspondiente al sistema dado y luego aplicamos triangulamos la matriz utilizando el método de eliminación gaussiana

$$\begin{cases} 3x + y + (\alpha + 1)z = 4 \\ -y + 3z = \beta \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \alpha + 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & \beta \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \alpha + 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & \beta \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \alpha + 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & \beta \\ 0 & 1 & -5 - 2\alpha & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \alpha + 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & \beta \\ 0 & 0 & -2 - 2\alpha & 1 + \beta \end{array} \right)$$

El ejercicio pide que el sistema sea compatible indeterminado por lo tanto tiene infinitas soluciones, para que esto suceda debe anularse la última fila

$$SCI \Leftrightarrow (-2 - 2\alpha = 0 \wedge 1 + \beta = 0) \therefore \boxed{SCI \Leftrightarrow (\alpha = -1 \wedge \beta = -1)}$$

Respuesta correcta: c)

✓ Ejercicio 6

Sea $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que $A \cdot A^T = I_n$ (I_n matriz identidad de orden n), se cumple que:

<input type="checkbox"/> a) $ A = \pm 2$	<input type="checkbox"/> b) $ A = 0$
<input checked="" type="checkbox"/> c) $ A = \pm 1$	<input type="checkbox"/> d) $ A = n$

Sabemos que $A \cdot A^T = I$

Aplicamos miembro a miembro determinante entonces resulta $|A \cdot A^T| = |I|$

En el primer miembro aplicamos $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ y en el segundo $|I| = 1$

Aplicamos las propiedades y resulta $|A| \cdot |A^T| = 1$

Sabemos que $|A^T| = |A|$

Reemplazamos $|A| \cdot |A| = 1$

Luego $(|A|)^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$

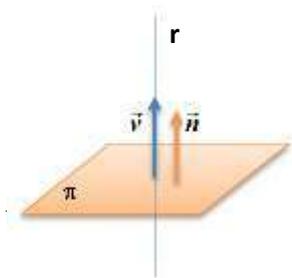
Respuesta correcta: c)

✓ Ejercicio 7

Sea la recta r que pasa por los puntos $A = (1;0;1)$ y $B = (1;-1;0)$ entonces la ecuación del plano π que pasa por $C = (-1;2;3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y B es:

<input type="checkbox"/> a) $\pi : (-1;2;3) + \lambda(0;-1;-1)$	<input type="checkbox"/> b) $\pi : -x + 2y + 3z + 5 = 0$
<input checked="" type="checkbox"/> c) $\pi : -y - z + 5 = 0$	<input type="checkbox"/> d) $\pi : (0;-1;-1) + \lambda(-1;2;3)$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1;-1;0) - (1;0;1) = (0;-1;-1) \Rightarrow \overline{AB} = (0;-1;-1)$$



$$\pi \perp r \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{v}$$

$$(x+1; y-2; z-3) \cdot (0;-1;-1) = 0$$

$$\cancel{(x+1)} \cdot 0 + (y-2) \cdot (-1) + (z-3) \cdot (-1) = 0$$

$$-y + 2 - z + 3 = 0$$

$$\pi : -y - z + 5 = 0$$

Respuesta correcta: c)

✓ **Ejercicio 8**

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sabiendo que $|A| = 4$, los determinantes: $|-3A^T|$ y $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2a & 2b \end{vmatrix}$ son respectivamente:

<input type="checkbox"/> a) $-12, -24$	<input type="checkbox"/> b) $-36, 24$
<input type="checkbox"/> c) $-36, -24$	<input checked="" type="checkbox"/> d) $36, -24$

Sabemos por el enunciado que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 4 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$

$$|-3A^T| \underset{|kA|=k^n|A|}{=} (-3)^2 |A^T| \underset{|A^T|=|A|}{=} (-3)^2 |A| \underset{|A|=4}{=} 9 \cdot 4 = 36 \Rightarrow \boxed{|-3A^T| = 36}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2a & 2b \end{vmatrix} \underset{1}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2a & 2b \end{vmatrix} \underset{2}{=} 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \underset{3}{=} 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{4}{=} 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot |A| \underset{5}{=} 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 4 = -24 \Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = -24}$$

- 1) *Factoreamos la primera fila del determinante*
- 2) *Factoreamos la segunda fila del determinante*
- 3) *La matriz que resulta del factoro de ambas filas tiene las filas permutadas*
- 4) *Reemplazamos por el determinante de A*
- 5) *Reemplazamos por el valor del determinante de A y operamos*

Respuesta correcta: d)

✓ Ejercicio 9

El conjunto de los $k \in \mathbb{R}$ tales que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -k & 0 \\ k & 3 & 1 \\ k & 3 & k \end{pmatrix}$ sea regular es:

<input type="checkbox"/> a) \emptyset	<input checked="" type="checkbox"/> b) $\mathbb{R} - \{1\}$
<input type="checkbox"/> c) \mathbb{R}	<input type="checkbox"/> d) $\{1\}$

A es regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ k & 3 & 1 \\ k & 3 & k \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & k \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-k) \begin{vmatrix} k & 1 \\ k & k \end{vmatrix} = 3(3k - 3) + k(k^2 - k) = 9k - 9 + k^3 - k^2 = k^3 - k^2 + 9k - 9 \therefore$$

$$|A| = k^3 - k^2 + 9k - 9 = (k - 1) \underbrace{(k^2 + 9)}_{\text{no tiene raíces reales}} \Rightarrow |A| = (k - 1)(k^2 + 9)$$

El valor de $k \in \mathbb{R}$ que anula el determinante es $k = 1$

Pero necesitamos que la matriz sea regular, o sea que su determinante no se anule entonces

A es regular $\Leftrightarrow k \neq 1$ Expresamos la solución en lenguaje conjuntista: A es regular $\Leftrightarrow k \in \mathbb{R} - \{1\}$

Respuesta correcta: b)

✓ Ejercicio 10

La ecuación simétrica de la recta r que pasa por el punto $A=(2;3;1)$ y es paralela a la recta de ecuación $s: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$ es:

<input type="checkbox"/> a) $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$	<input checked="" type="checkbox"/> b) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$
<input type="checkbox"/> c) $(x;y;z) = (2;3;1) + \lambda(3;-1;2)$	<input type="checkbox"/> d) $(x;y;z) = (-1;-3;0) + \lambda(5;5;3)$

La expresión simétrica de una recta que pasa por $A=(x_0;y_0;z_0)$ y tiene vector director $\vec{v}=(v_x;v_y;v_z)$ es:

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$$

De la recta s dato del problema, obtenemos el vector director

$$s: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \vec{v}_s = (3;-1;2)$$

Luego como

$$r \parallel s \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \quad \text{reemplazando se obtiene la recta pedida} \quad r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Respuesta correcta: b)