

✓ **Ejercicio 1**

Una compañía de auditores se especializa en preparar liquidaciones y auditorías de Pymes. Tienen interés en saber cuántas auditorías y liquidaciones pueden realizar mensualmente para maximizar sus ingresos. Se dispone de 800 horas de trabajo directo y 320 horas para revisión. Una auditoría en promedio requiere de 40 horas de trabajo directo y 10 horas de revisión, además aporta un ingreso de 300 u.ms. Una liquidación de impuesto requiere de 8 horas de trabajo directo y de 5 horas de revisión, produce un ingreso de 100 u.ms. El máximo de liquidaciones mensuales disponibles es de 60.

- a) Plantear el problema
- b) Hallar el programa que maximiza el ingreso empleando el método gráfico

Con los datos del enunciado planteamos el problema:



Maximizamos el ingreso  $Z = 300x + 100y$

$$\text{Sujeto a } \begin{cases} 40x + 8y \leq 800 \\ 10x + 5y \leq 320 \\ y \leq 60 \end{cases} \text{ con } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$Z(x; y) = 300x + 100y$$

$$Z(0;0) = 300 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 0$$

$$Z(0;60) = 300 \cdot 0 + 100 \cdot 60 = 6000$$

$$Z(2;60) = 300 \cdot 2 + 100 \cdot 60 = 6600$$

$$Z(12;40) = 300 \cdot 12 + 100 \cdot 40 = 7600$$

$$Z(20;0) = 300 \cdot 20 + 100 \cdot 0 = 6000$$

**Solución óptima**

**X = 12 auditorías**

**Y = 40 liquidaciones**

**Z = \$ 7600**

✓ Ejercicio 2

$$2) \text{ Sea } T = \{(1;0;1), (1;-1;1), (1;1;1)\} \subset \mathfrak{R}^3$$

a) Hallar  $\bar{T}$

b) Hallar  $h \in \mathfrak{R}$ , si existen tal que  $\vec{u} = (2;1;h) \in \bar{T}$

a) Planteamos la combinación lineal de los vectores de  $T = \{(1;0;1), (1;-1;1), (1;1;1)\} \subset \mathfrak{R}^3$  e igualamos a un vector genérico  $(x; y; z) \in \mathfrak{R}^3$  para determinar  $\bar{T}$  o sea el subespacio generado por la familia  $T$ .

$\alpha(1;0;1) + \beta(1;-1;1) + \gamma(1;1;1) = (x; y; z)$  Aplicamos la multiplicación por un escalar y la adición de los vectores

$$(\alpha + \beta + \gamma; -\beta + \gamma; \alpha + \beta + \gamma) = (x; y; z) \quad \text{Igualamos los vectores} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ -\beta + \gamma = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & (1) & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x-y \\ 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{array} \right)$$

Para obtener el subespacio generado por la familia de vectores el sistema debe ser compatible y para ello debe cumplirse que  $z - x = 0$ , por lo tanto

$$\bar{T} = \{(x; y; z) \in \mathfrak{R}^3 / z - x = 0\} \quad \text{ó} \quad \bar{T} = \{(x; y; z) \in \mathfrak{R}^3 / z = x\}$$

b) Si el vector  $\vec{u} = (2;1;h)$  pertenece al subespacio generado por  $T$ , debe ser un vector que cumpla con la condición de los vectores que forman parte de  $\bar{T}$ , o sea que la tercera componente sea igual a la primera, por lo tanto  $h = 2$

Otra forma de encontrar el o los valores de  $h$  es escribir al vector como CL de la familia y resolver el sistema que resulta:

$\alpha(1;0;1) + \beta(1;-1;1) + \gamma(1;1;1) = (2;1;h)$  Operando entonces resulta:

$$(\alpha + \beta + \gamma; -\beta + \gamma; \alpha + \beta + \gamma) = (2;1;h) \quad \text{Igualamos los vectores} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ -\beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = h \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} (1) & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & h \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & (1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h-2 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h-2 \end{array} \right)$$

Para obtener el valor de  $h$ , el sistema debe ser compatible, debe cumplirse que  $h - 2 = 0 \Rightarrow h = 2$

✓ Ejercicio 3

Sea  $Z = 120x + 60y$  sujeta a las siguientes restricciones:  $\begin{cases} x + 2y \leq 400 \\ x + y \leq 300 \end{cases}$  con  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

La solución óptima que maximiza  $Z$  es

<input type="checkbox"/> a) $(x; y; S_1; S_2) = (0; 60; 100; 0)$ $Z = 36.000$	<input type="checkbox"/> b) $(x; y; S_1; S_2) = (0; 60; 0; 120)$ $Z = 36.000$
<input type="checkbox"/> c) $(x; y; S_1; S_2) = (300; 0; 0; 120)$ $Z = 36.000$	<input checked="" type="checkbox"/> d) $(x; y; S_1; S_2) = (300; 0; 100; 0)$ $Z = 36.000$

Convertimos las restricciones en igualdades sumando las variables de holgura  $\begin{cases} x + 2y + S_1 = 400 \\ x + y + S_2 = 300 \\ x, y \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$

Planteamos la primera tabla del simplex:

	$C_j$	120	60	0	0	Valor de la solución
$C_k$	$X_k$	$x$	$y$	$S_1$	$S_2$	$b$
0	$S_1$	1	2	1	0	400
0	$S_2$	1	1	0	1	300
$Z_j$		0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		$120 - 0 = 120$	$60 - 0 = 60$	$0 - 0 = 0$	$0 - 0 = 0$	

↑ V.E

$400/1=400$   
 $300/1=300 \rightarrow VS$

	$C_j$	120	60	0	0	Valor de la solución
$C_k$	$X_k$	$x$	$y$	$S_1$	$S_2$	$b$
0	$S_1$	0	1	1	-1	100
120	$x$	1	1	0	1	300
$Z_j$		120	120	0	120	36000
$C_j - Z_j$		$120 - 120 = 0$	$60 - 120 = -60$	$0 - 0 = 0$	$0 - 120 = -120$	

La solución óptima es  $(x; y; S_1; S_2) = (300; 0; 100; 0)$   $Z = 36.000$

La respuesta correcta es la d)

✓ Ejercicio 4

Si el vector de precios es un múltiplo escalar de  $(4;8;8)$ , una posibilidad de consumo es  $(x_1; x_2; x_3) = (20; 10; 30)$ . Y el ingreso es de  $I = \$800$ , entonces la ecuación presupuestaria es:

a)  $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 800$

b)  $8x_1 + 16x_2 + 16x_3 = 800$

c)  $4x_1 + 8x_2 + 8x_3 = 800$

d)  $\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{16} + \frac{x_3}{16} = 1$

Si el vector de precios es un múltiplo escalar de  $(4;8;8)$  entonces  $\vec{p} = \alpha(4;8;8) = (4\alpha; 8\alpha; 8\alpha)$

Planteamos la ecuación presupuestaria y reemplazamos la posibilidad de consumo  $(x_1; x_2; x_3) = (20; 10; 30)$  para determinar el valor de  $\alpha$

$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 = I$  Ecuación presupuestaria

$$4\alpha \cdot x_1 + 8\alpha \cdot x_2 + 8\alpha \cdot x_3 = 800$$

$$4\alpha \cdot 20 + 8\alpha \cdot 10 + 8\alpha \cdot 30 = 800$$

$$80\alpha + 80\alpha + 240\alpha = 800$$

Entonces el vector precio es  $\vec{p} = 2(4;8;8) = (2 \cdot 4; 2 \cdot 8; 2 \cdot 8) \Rightarrow \vec{p} = (8; 16; 16)$

$$400\alpha = 800 \Rightarrow \alpha = 2$$

Luego reemplazando la ecuación presupuestaria es:  $8x_1 + 16x_2 + 16x_3 = 800$

La respuesta correcta es la b)

✓ Ejercicio 5

Dada la familia de vectores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $A = \{(1;1;2k), (1;-1;1), (1;k;-k)\}$ , el conjunto de los  $k \in \mathbb{R}$  para el cual los vectores del conjunto son linealmente dependiente es:

- a)  $\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$ 
 b)  $\mathbb{R} - \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$   
 c)  $\emptyset$ 
 d)  $\mathbb{R}$

Un conjunto de vectores es linealmente dependiente cuando no existe una única combinación lineal que da el vector nulo.

Planteamos la combinación lineal de los vectores de la familia  $A = \{(1;1;2k), (1;-1;1), (1;k;-k)\}$  e igualamos al vector  $(0;0;0)$

$$\alpha(1;1;2k) + \beta(1;-1;1) + \gamma(1;k;-k) = (0;0;0)$$

Operando e igualando al vector nulo, resulta el siguiente sistema  $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + k\gamma = 0 \\ 2k\alpha + \beta - k\gamma = 0 \end{cases}$

El sistema de ecuaciones lineales es un sistema homogéneo y cuadrado, por lo tanto para que no exista una única solución el sistema debe ser compatible indeterminado, ya que se pide que la familia sea linealmente dependiente, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser igual a cero

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k & 0 \\ 2k & 1 & -k & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & 1 & -k \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & 1 & -k \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2k & -k \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2k & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{(k-k)}_{=0} - 1 \cdot (-k - 2k^2) + 1 \cdot (1 + 2k) =$$

$$= k \cdot (1 + 2k) + 1 \cdot (1 + 2k) = \underbrace{(1 + 2k)(k + 1)}_{\text{factoreamos}} = 0$$

$$\text{Resolvemos } (1 + 2k)(k + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2k = 0 \\ k + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ \vee \\ k = -1 \end{cases}$$

Luego el conjunto que satisface que la familia sea LD es  $\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$

La respuesta correcta es la a)

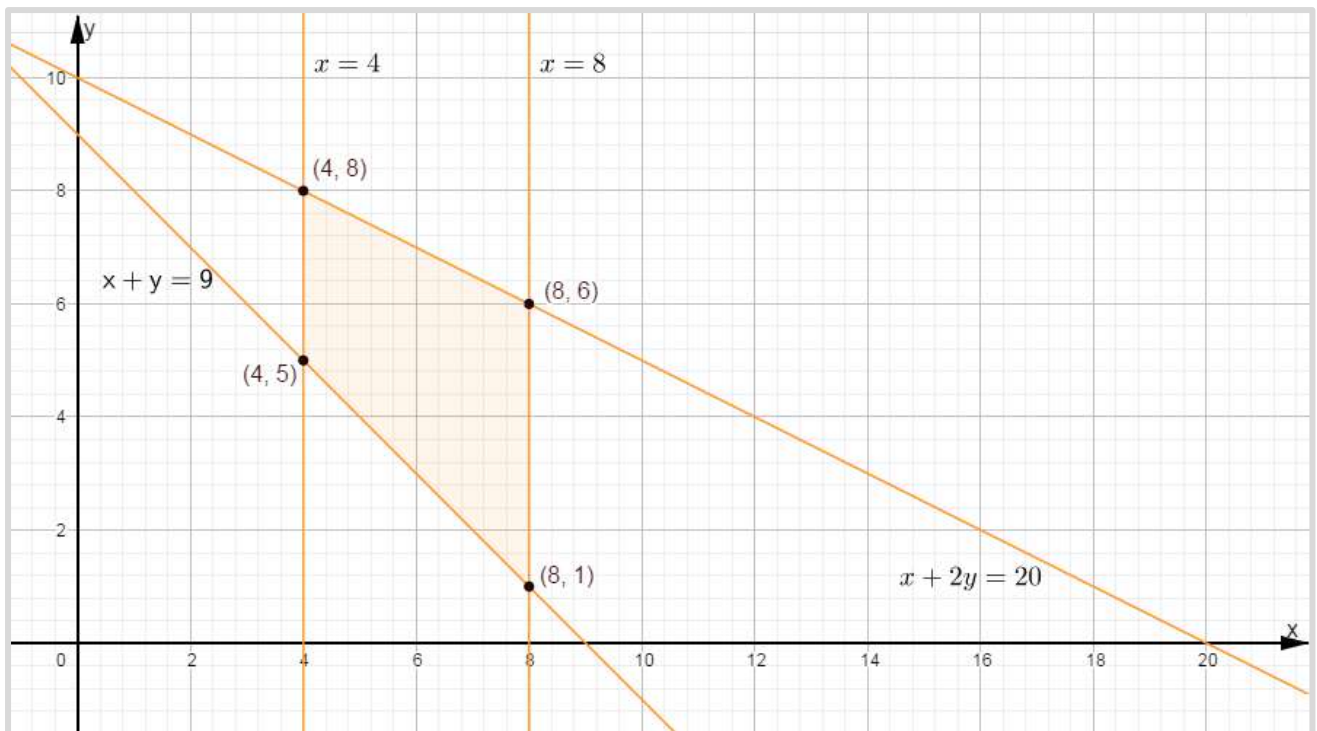
✓ Ejercicio 6

Siendo  $R$  la región limitada por  $\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ x + y \geq 9 \\ 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$  con  $x, y \geq 0$ , la función  $Z = 6x + 3y$  alcanza un valor

máximo y un valor mínimo en:

- a)  $Z_{Máx} = 66$  en  $(8;6)$   $\wedge$   $Z_{Mín} = 51$  en  $(8;1)$        b)  $Z_{Máx} = 51$  en  $(8;1)$   $\wedge$   $Z_{Mín} = 48$  en  $(4;8)$   
 c)  $Z_{Máx} = 48$  en  $(4;8)$   $\wedge$   $Z_{Mín} = 39$  en  $(4;5)$        d)  $Z_{Máx} = 66$  en  $(8;6)$   $\wedge$   $Z_{Mín} = 39$  en  $(4;5)$

Representamos las restricciones estructurales y las condiciones de no negatividad, hallamos los vértices y calculamos la función objetivo en cada uno de ellos buscando el que maximiza la función y el que la minimiza.



$$Z(x; y) = 6x + 3y$$

$$Z(4;5) = 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 39 \text{ Mínimo}$$

$$Z(4;8) = 6 \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 48$$

$$Z(8;6) = 6 \cdot 8 + 3 \cdot 6 = 66 \text{ Máximo}$$

$$Z(8;1) = 6 \cdot 8 + 3 \cdot 1 = 51$$

La respuesta correcta es la d)

✓ Ejercicio 7

Señalar cuál de los siguientes conjuntos no es un subespacio de  $\mathcal{R}^3$

a)  $S = \{(x; y; z) \in \mathcal{R}^3 / x - y + z = 0\}$

b)  $S = \{(x; y; z) \in \mathcal{R}^3 / x - y = 0, x - z = 0\}$

c)  $S = \{(x; y; z) \in \mathcal{R}^3 / x = 0, y = z\}$

d)  $S = \{(x; y; z) \in \mathcal{R}^3 / x + 2y + z = 1\}$

El único conjunto que no es un subespacio de  $\mathcal{R}^3$  es  $S = \{(x; y; z) \in \mathcal{R}^3 / x + 2y + z = 1\}$  ya que para que sea subespacio es necesario que el vector nulo pertenezca al conjunto  $S$

Si reemplazamos  $(0; 0; 0)$  en la condición  $x + 2y + z = 1$ , resulta  $0 + 2 \cdot 0 + 0 = 1 \stackrel{?}{=} 1 \therefore 0 = 1$  Absurdo

Luego el vector nulo no pertenece al conjunto por lo tanto  $S$  no es un subespacio de  $\mathcal{R}^3$

La respuesta correcta es la d)

✓ Ejercicio 8

La dimensión del subespacio solución del sistema homogéneo asociado al sistema  $\begin{cases} 2y + 4z = 0 \\ -2x + 5z = 2 \end{cases}$  es:

a)  $\dim S = 0$

b)  $\dim S = 1$

c)  $\dim S = 2$

d)  $\dim S = 3$

Debemos encontrar la solución del sistema homogéneo asociado para determinar la dimensión del subespacio solución.

Escribimos el sistema homogéneo asociado  $\begin{cases} 2y + 4z = 0 \\ -2x + 5z = 0 \end{cases}$ , su matriz ampliada y resolvemos

$$\begin{cases} 2y + 4z = 0 \\ -2x + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = \frac{5}{2}z \end{cases} \Rightarrow \text{el conjunto solución es } S = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x = \frac{5}{2}z \wedge y = -2z \right\}$$

Escribimos un vector del conjunto solución que cumpla con las condiciones del conjunto:

$$(x; y; z) = \left( \frac{5}{2}z; -2z; z \right) = z \left( \frac{5}{2}; -2; 1 \right)$$

La base del subespacio solución es  $B = \left\{ \left( \frac{5}{2}; -2; 1 \right) \right\} \Rightarrow \text{Dim} S = 1$

La respuesta correcta es la b)



✓ Ejercicio 9

El conjunto de valores de  $k \in \mathbb{R}$  para que los vectores del conjunto  $A = \{(1; -2; 5), (1; 3; k), (4; 1; 11)\}$  constituyan una base de  $\mathbb{R}^3$  es:

- a)  $\mathbb{R} - \{0\}$                        b)  $\mathbb{R}$   
 c)  $\{0\}$                                d)  $\emptyset$

Un conjunto de 3 vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^3$  constituyen una base de dicho espacio.

Planteamos la combinación lineal de los vectores de la familia  $A = \{(1; -2; 5), (1; 3; k), (4; 1; 11)\}$  e igualamos al vector  $(0; 0; 0)$  y determinamos cuál o cuáles son los valores de  $k \in \mathbb{R}$ , para que la familia  $A$  sea una base del espacio  $\mathbb{R}^3$

$$\alpha(1; -2; 5) + \beta(1; 3; k) + \gamma(4; 1; 11) = (0; 0; 0)$$

Operando e igualando al vector nulo, resulta el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ -2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha + k\beta + 11\gamma = 0 \end{cases}$$

Escribimos su matriz ampliada y resolvemos el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema que deberá ser distinto de cero

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & k & 11 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & k & 11 \end{vmatrix} \neq 0$$

Desarrollamos el determinante por la primera fila por la Regla de Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & k & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ k & 11 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & k \end{vmatrix} = -9k \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & k & 11 \end{vmatrix} = -9k \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$$

Para que el conjunto  $A$  sea una base de  $\mathbb{R}^3$ ,  $k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0 \Rightarrow k \in \mathbb{R} - \{0\}$

La respuesta correcta es la a)

✓ Ejercicio 10

Se considera el recinto definido por las siguientes restricciones  $\begin{cases} x - 2y \leq 6 \\ x \geq -2 \\ y \leq -1 \end{cases}$ . Los vértices o puntos

esquina de la zona de factibilidad son:

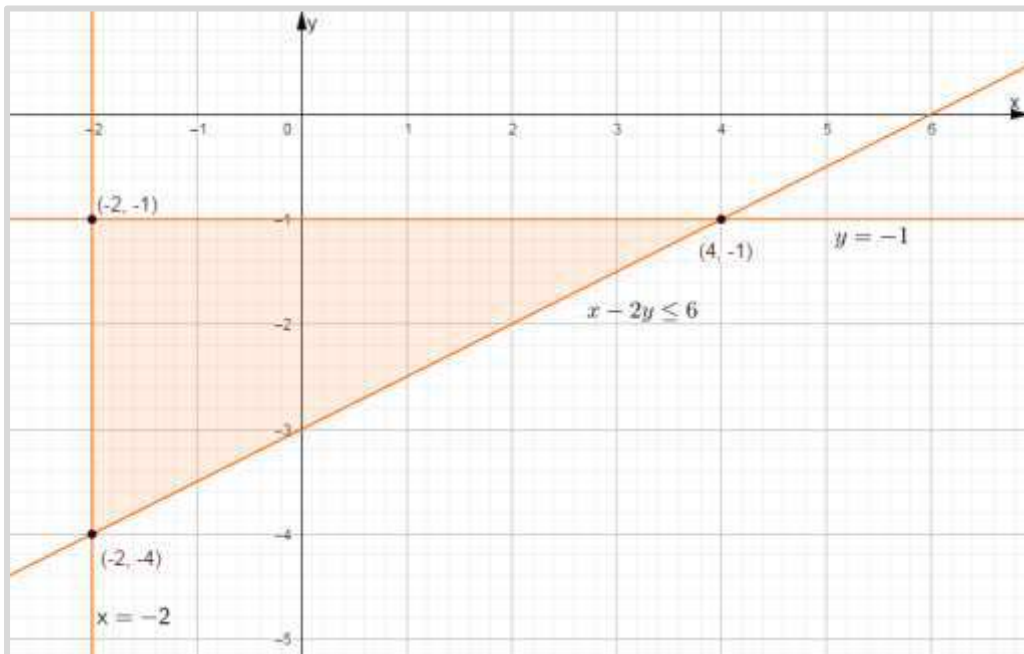
a)  $(-2; -4), (4; -1)$

b)  $(-2; -1), (4; -1)$

c)  $(-2; -4), (-2; -1), (4; -1)$

d)  $(-2; -1), (-2; -4)$

Representamos cada una de las inecuaciones y obtenemos la región de factibilidad



Señalamos los vértices

Los vértices son  $(-2; -4), (-2; -1), (4; -1)$

La respuesta correcta es la c)