ANÁLISIS MATEMÁTICO II (284)

Docente: Verónica García Fronti
Cátedra: María José Bianco

RESOLUCIÓN

2º PARCIAL

TEMA A

EJERCICIO 1

a) Calcular en función del parámetro b, todos los puntos críticos de la siguiente función: $f(x,y) = x^2 + (b^2+2)y^2 + 2xy + 8$
b) Determinar, mediante la condición de suficiencia si los puntos encontrados en a) son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura.

a) Condición necesaria de primer orden para buscar los puntos críticos:

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2y = 0 \\ f'_y = 2y(b^2+2) + 2x = 0 \end{cases}$$

Para **cualquier valor de b** $\in \mathbb{R}$ **existe un único punto crítico**= (0,0)

b) Condición suficiente de segundo orden:

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2(b^2+2) \end{vmatrix} = 4(b^2+2) - 4 > 0$ El punto crítico es extremo para cualquier valor de b $\in \mathbb{R}$

Como $f''_{xx} = 2 > 0 \ \Rightarrow La\ función\ f(x,y)\ presenta\ un\ mínimo\ relativo\ en\ el\ punto\ (0,0)\ para\ todo\ valor\ de\ b \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 2

a) Dada la función $z = x + y$ sujeta a: $xy = 1$ Hallar el/los puntos críticos mediante la condición necesaria del método de Lagrange. Armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por el/los puntos críticos y concluir.

$$L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(1 - xy)$$

Condiciones necesarias

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda y = 0 \\ L'_y = 1 - \lambda x = 0 \\ L'_\lambda = 1 - xy = 0 \end{cases} \Rightarrow Dos\ puntos\ críticos\text{:}\ \ (x_1, y_1, \lambda_1) = (1,1,1) \qquad (x_2, y_2, \lambda_2) = (-1, -1, -1)$$

Condición de suficiencia $$H(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & -\lambda \\ x & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \det H < 0 \quad La\ función\ z = x + y\ \ alcanza\ un\ mínimo\ relativo\ condicionado\ en\ el\ punto\ (1,1)$$

$$H(-1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H > 0$$

$La\ función\ z = x + y\ \ alcanza\ un\ máximo\ relativo\ condicionado\ en\ el\ punto\ (-1, -1)$

EJERCICIO 2

b) Sea la función de utilidad $U(x_1, x_2)$ sujeta a una restricción de ingreso: $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Indicar como se interpreta un multiplicador λ cuyo valor óptimo es <u>negativo</u>.

En el problema planteado el λ óptimo esta relacionado con la utilidad marginal del ingreso en el punto óptimo. Que el lambda sea negativo significa que ante incrementos pequeños del ingreso (I) la utilidad óptima disminuye, justificación:

$$\frac{\partial U_{\text{óptima}}}{\partial I} = \lambda_{\text{óptimo}}$$

El $\lambda_{\text{óptimo}}$ nos brinda información sobre la utilidad marginal con respecto al ingreso en el punto óptimo.

Si el $\lambda_{\text{óptimo}} < 0 \Rightarrow \frac{\partial U_{\text{óptima}}}{\partial I} < 0 \quad \textit{Ante pequeños incrementos del ingreso I la Utilidad óptima va a disminuir}$.

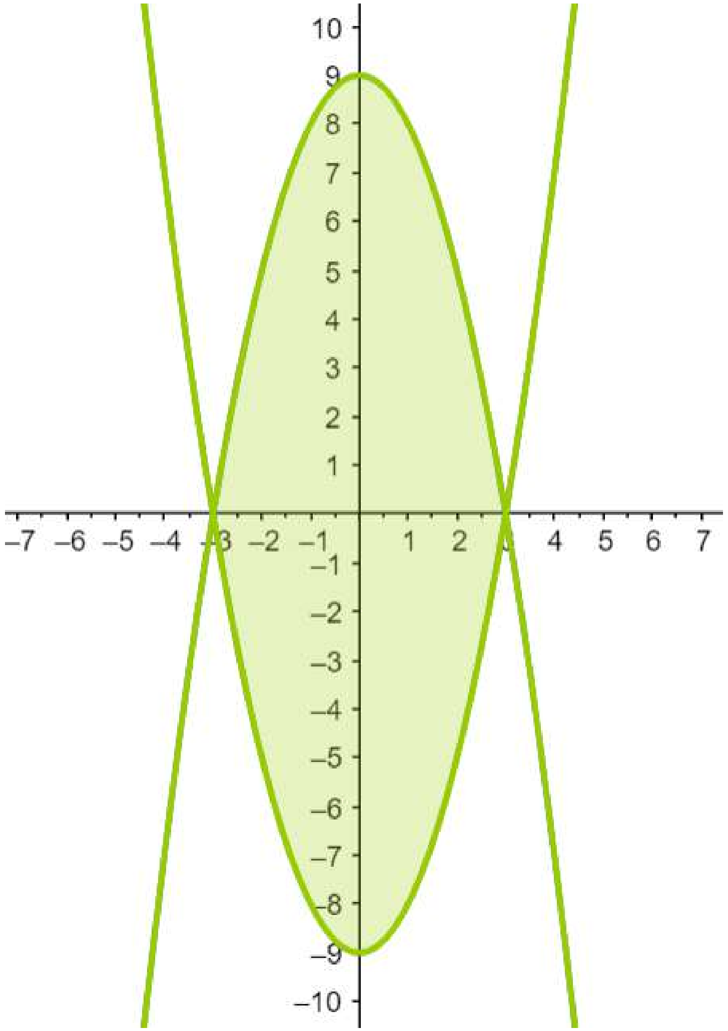
EJERCICIO 3

Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ $R = Región\ encerrada\ por$: $y = x^2 - 9$, $y = 9 - x^2$

a. Graficar el recinto de integración dado.

b. PLANTEAR (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable x y luego por la variable y: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

c. PLANTEAR (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable y y luego por la variable x: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$



b) $\iint_R f(x,y)dx\,dy = \int_0^9 \int_{-\sqrt{9-y}}^{\sqrt{9-y}} f(x,y)dx\,dy + \int_{-9}^0 \int_{-\sqrt{y+9}}^{\sqrt{y+9}} f(x,y)dx\,dy$

c) $\iint_R f(x,y)dx\,dy = \int_{-3}^3 \int_{x^2-9}^{9-x^2} f(x,y)dydx$

EJERCICIO 4

a. La siguiente EDO de primer orden $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2+2y}{2x^2y+2x}$ es de tipo (JUSTIFICAR):

a. Lineal

b. Exacta

c. Bernoulli

d. Variables Separables

$$(2x^2y + 2x)dy + (2xy^2 + 2y)dx = 0$$

$$P(x,y) = 2xy^2 + 2\mathrm{y} \Rightarrow P'_y = 4xy + 2$$
$$Q(x,y) = 2x^2y + 2x \Rightarrow Q'_x = 4xy + 2$$

$P'_y = Q'_x$ Cumple la condición de simetría por lo tanto la ecuación diferencial es EXACTA

EJERCICIO 4

b) La siguiente EDO de primer orden $\frac{dy}{dx}=\frac{y^3}{x^3}-\frac{2y}{x}$ es de tipo (JUSTIFICAR):

a. Bernoulli

b. Lineal

c. Exacta

d. Variables Separables

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^3}{x^3}-\frac{2y}{x}$$

$$y'=\frac{y^3}{x^3}-\frac{2y}{x}$$

$$y'+\frac{2y}{x}=\frac{y^3}{x^3} \Rightarrow Ecuación\ diferencial\ BERNOULLI$$

EJERCICIO 5

Dado el siguiente modelo:

$$D(p) = -2p + 30$$
$$S(p) = 3p - 6$$
$$p'' = 0{,}2\,[D(p) - S(p)]$$

a) Deducir la trayectoria temporal del precio $p = p(t)$ si $p(0) = 15$ y p´(0)=4

b) La solución encontrada en el punto anterior ¿es estable?

$$p'' = 0{,}2\,[-2p + 30 - 3p + 6]$$
$$p'' = -p + 36/5$$
$$p'' + p = 36/5$$

Solución homogénea

$r^2 + 1 = 0 \ \rightarrow$ Raíces de la ecuación característica: $r_1 = i \quad r_2 = -i$

Solución homogénea: $p_H(t) = C_1 sen(t) + C_2 \cos(t)$

La raíces de la ecuación característica son complejas con parte real nula por lo tanto la solución es inestable

Solución complementaria

$g(t) = 36/5$ $\qquad$ $Propongo$: $\quad p_c = A \qquad p'_c = 0 \quad p''_c = 0$

Reemplazo en la EDO:

$A = 36/5 \Rightarrow \qquad p_c = 36/5$

Solución general $\qquad p_G = C_1 sen(t) + C_2 \cos(t) + 36/5$

Solución particular

$$p(0) = 15 \Rightarrow C_2 + \frac{36}{5} = 15 \Rightarrow C_2 = 39/5$$
$$p'(0) = 4 \ \Rightarrow C_1 = 4$$

$$p_p = 4sen(t) + 39/5\cos(t) + 36/5$$

RESOLUCIÓN

2º PARCIAL

TEMA B

EJERCICIO 1

a) Calcular en función del parámetro a, todos los puntos críticos de la siguiente función: $f(x,y) = x^2 + (a^2+7)y^2 + 2xy + 5$

CPO

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2y = 0 \\ f'_y = 2y(a^2+7) + 2x = 0 \end{cases} \rightarrow$$

Para **cualquier valor de a** $\in \mathbb{R}$ **existe un único punto crítico** $\boldsymbol{P_0}$ = (0,0)

b) Determinar, mediante la condición de suficiencia si los puntos encontrados en a) son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura.

CSO

$f''_{xx} = 2$ $\quad f''_{xy} = 2$ $\quad f''_{yy} = 2(a^2+7)$

$H = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2(a^2+7) \end{vmatrix} = 4(a^2+7) - 4 = 4a^2 + 24 > 0 \rightarrow$ **Existe extremo para cualquier valor de a** $\in \mathbb{R}$

$f''_{xx} = 2 > 0 \rightarrow$ **hay un mínimo relativos condicionado en** $\boldsymbol{P_0}$ **para cualquier valor de a** $\in \mathbb{R}$

EJERCICIO 2

a) Dada la función de producción $P(K,L) = K * L$ sujeta a: $K + L = 4$
Hallar el/los puntos críticos mediante la condición necesaria del método de Lagrange. Armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por el/los puntos críticos y concluir.

$$\mathcal{L} = KL + \lambda(4 - K - L)$$

CPO

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_K = L - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_L = K - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 4 - K - L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} L = \lambda \\ K = \lambda \\ L = K = \lambda \end{matrix} \rightarrow 4 - K - K = 0 \rightarrow \begin{matrix} K = 2 \\ L = 2 \\ \lambda = 2 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{P_0 = (2, 2, 2)}$$

CSO

$\mathcal{L}''_{KK} = 0$ $\quad$ $\mathcal{L}''_{KL} = 1$ $\quad$ $\mathcal{L}''_{LL} = 0$ $\quad$ $g'_K = -1$ $\quad$ $g'_L = -1$

$$\widetilde{H} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0 \rightarrow \textbf{Existe máximo relativo condicionado en } \boldsymbol{P_0}$$

EJERCICIO 2

b) Sea la función de utilidad $U(x_1, x_2)$ sujeta a una restricción de ingreso: $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Indicar como se interpreta un multiplicador λ cuyo valor óptimo es POSITIVO.

En el problema planteado el λ óptimo esta relacionado con la utilidad marginal del ingreso en el punto óptimo. Que el lambda sea positivo significa que ante incrementos pequeños del ingreso (I) la utilidad óptima aumenta, justificación:

$$\frac{\partial U_{óptima}}{\partial I} = \lambda_{óptimo}$$

El $\lambda_{óptimo}$ nos brinda información sobre la utilidad marginal con respecto al ingreso en el punto óptimo.

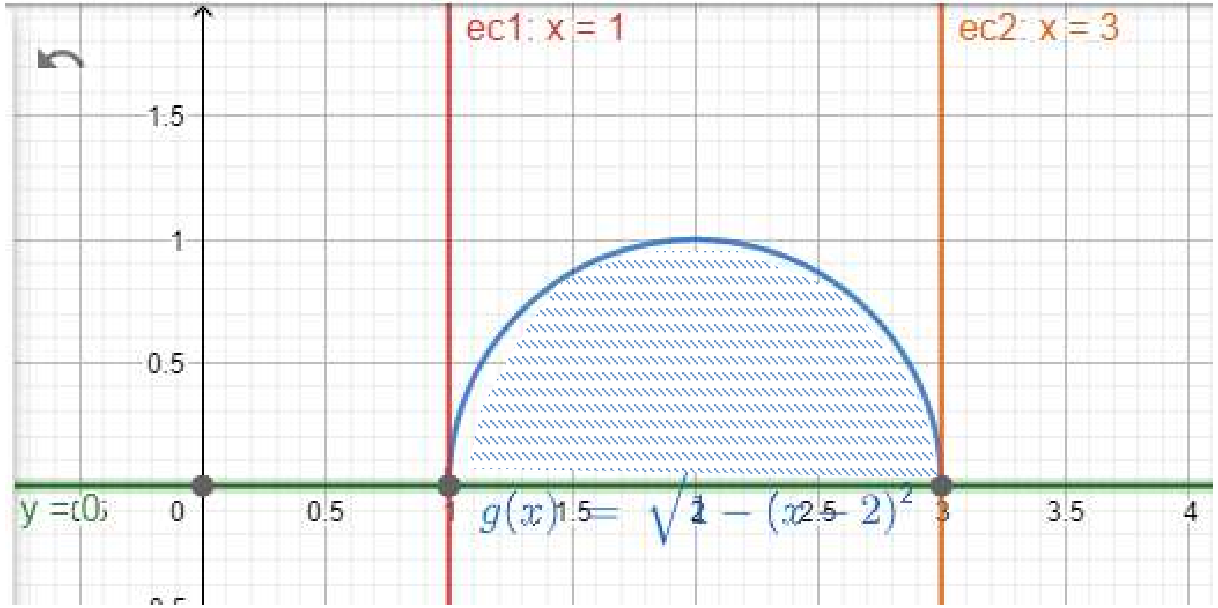
Si el $\lambda_{óptimo} > 0 \Rightarrow \frac{\partial U_{óptima}}{\partial I} > 0$ $\quad$ *Ante pequeños incrementos del ingreso* (I) *la Utilidad* (U) *óptima va a aumentar.*

EJERCICIO 3

Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad\qquad R = \left\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 /\ 0 \le y \le \sqrt{1-(x-2)^2} \land 1 \le x \le 3\right\}$$

a. Graficar el recinto de integración dado.



b. PLANTEAR (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable x y luego por la variable y:

$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy\,.$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}+2}^{+\sqrt{1-y^2}+2} f(x,y)dxdy$$

c. PLANTEAR (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable y luego por la variable x: $V = \iint_R f(x,y)\,dy\,dy$

$$\int_1^3 \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} f(x,y)dydx$$

EJERCICIO 4

a. La siguiente EDO de primer orden $\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2+1)x}{(x-1)y^3}$ es de tipo:

$$\frac{y^3}{(y^2+1)}dy = \frac{x}{(x-1)}dx$$

Variables Separables

b. La siguiente EDO de primer orden $\left(\frac{5}{1+x^2} + 2y\right)dx + 2x\,dy = 0$ es de tipo:

$P(x,y) = \frac{5}{1+x^2} + 2y$ $\qquad$ $\mathrm{Q(x,y)} = 2x$

$$P'_y = Q'_x = 2$$

Exacta

EJERCICIO 5

Al estudiar el modelo econométrico de Phillips se presenta la ecuación diferencial $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 4 + 2t$.

a) Encontrar la solución $y = f(t)$ si $y(0) = 2$ e $y´(0) = 1$

$\boldsymbol{y_h}: y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

$r^2 + r + \frac{1}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = r_2 = -1/2$

$$y_h = C_1\, e^{-\frac{1}{2}t} + C_2\, t\, e^{-\frac{1}{2}t}$$

$\boldsymbol{y_p}: \mathrm{g(t)} = 4 + 2t$

$y_p = At + B \qquad y'_p = A \qquad y''_p = 0$

$$0 + A + \frac{1}{4}(At + B) = 4 + 2t$$

$\begin{cases} \frac{1}{4}At = 2t \\ A + \frac{1}{4}B = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} A = 8 \\ B = -16 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad y_p = 8t - 16$

$$\boldsymbol{y_{SG} = C_1\, e^{-\frac{1}{2}t} + C_2\, t\, e^{-\frac{1}{2}t} + 8t - 16}$$

$\boldsymbol{y(0) = 2} \quad 2 = C_1 - 16 \quad \rightarrow \quad C_1 = 18$

$\boldsymbol{y´(0) = 1} \quad 1 = -\frac{1}{2}C_1 + C_2 + 8 \quad \rightarrow \quad C_2 = 1$

$$\boldsymbol{y_{SP} = 18\, e^{-\frac{1}{2}t} + t\, e^{-\frac{1}{2}t} + 8t - 16}$$

b) La solución encontrada en el punto anterior ¿es estable?

La solución encontrada es ESTABLE porque ambas raíces son negativas

RESOLUCIÓN

2º PARCIAL

TEMA C

EJERCICIO 1

JUSTIFICAR RIGUROSAMENTE CADA UNA DE LAS RESPUESTAS

a) Calcular en función del parámetro b, todos los puntos críticos de la siguiente función: $f(x,y) = x^2 + (b^2+2)y^2 + 2xy + 8$

b) Determinar, mediante la condición de suficiencia si los puntos encontrados en a) son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura.

a) Condición necesaria de primer orden para buscar los puntos críticos:

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2y = 0 \\ f'_y = 2y(b^2+2) + 2x = 0 \end{cases}$$

Para **cualquier valor de b** $\in \mathbb{R}$ **existe un único punto crítico**= (0,0)

b) Condición suficientes de segundo orden:

$H(0{,}0) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2(b^2+2) \end{vmatrix} = 4(b^2+2) - 4 > 0$ El punto crítico es extremo para cualquier valor de b $\in \mathbb{R}$

Como $f''_{xx} = 2 > 0 \;\; \Rightarrow La\ función\ f(x,y)\ presenta\ un\ mínimo\ relativo\ en\ el\ punto\ (0,0)\ para\ todo\ valor\ de\ b \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 2

JUSTIFICAR RIGUROSAMENTE CADA UNA DE LAS RESPUESTAS

a) Dada la función de producción $P(K,L) = K * L$ sujeta a: $K + L = 4$
Hallar el/los puntos críticos mediante la condición necesaria del método de Lagrange. Armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por el/los puntos críticos y concluir.

$$\mathcal{L} = KL + \lambda(4 - K - L)$$

CPO

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_K = L - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_L = K - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 4 - K - L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} L = \lambda \\ K = \lambda \\ L = K = \lambda \end{matrix} \rightarrow 4 - K - K = 0 \rightarrow \begin{matrix} K = 2 \\ L = 2 \\ \lambda = 2 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{P_0 = (2, 2, 2)}$$

CSO

$\mathcal{L}''_{KK} = 0$ $\quad \mathcal{L}''_{KL} = 1$ $\quad \mathcal{L}''_{LL} = 0$ $\quad g'_K = -1$ $\quad g'_L = -1$

$$\widetilde{H} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0 \rightarrow \textbf{Existe máximo relativo condicionado en } \boldsymbol{P_0}$$

b) Sea la función de utilidad $U(x_1, x_2)$ sujeta a una restricción de ingreso: $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Indicar como se interpreta un multiplicador λ cuyo valor óptimo es POSITIVO.

En el problema planteado el λ óptimo esta relacionado con la utilidad marginal del ingreso en el punto óptimo. Que el lambda sea positivo significa que ante incrementos pequeños del ingreso (I) la utilidad óptima aumenta, justificación:

$$\frac{\partial U_{óptima}}{\partial I} = \lambda_{óptimo}$$

El $\lambda_{óptimo}$ nos brinda información sobre la utilidad marginal con respecto al ingreso en el punto óptimo.

Si el $\lambda_{óptimo} > 0 \;\Rightarrow \frac{\partial U_{óptima}}{\partial I} > 0 \quad Ante\ pequeños\ incrementos\ del\ ingreso\ I\ la\ Utilidad\ óptima\ va\ a\ aumentar.$

EJERCICIO 3

JUSTIFICAR RIGUROSAMENTE CADA UNA DE LAS RESPUESTAS

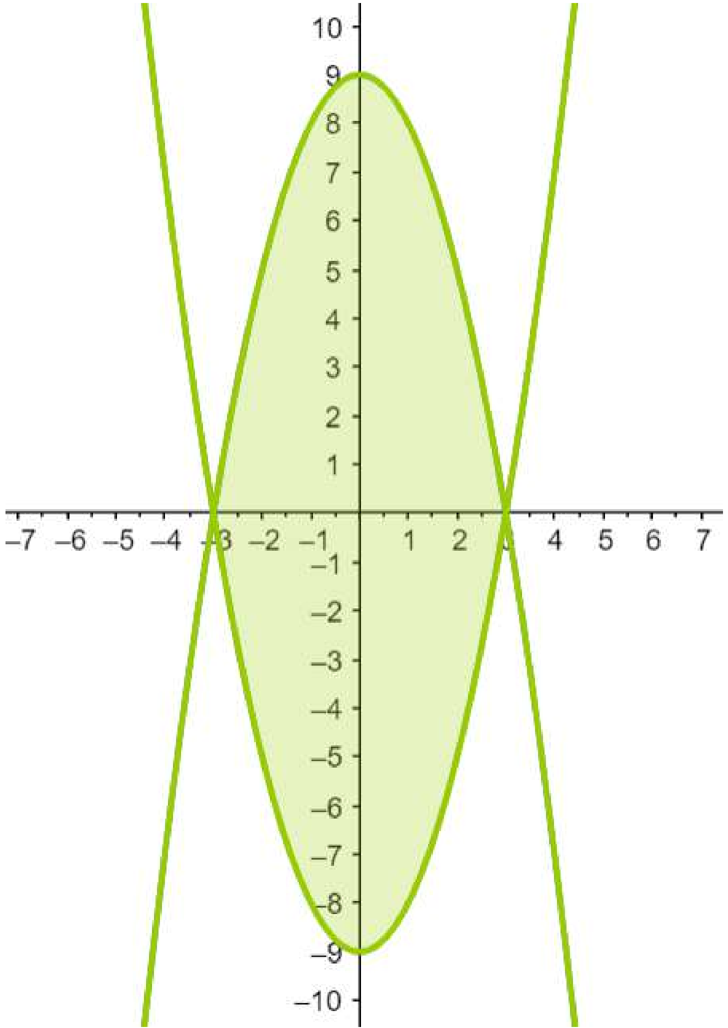
Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad R = Región\ encerrada\ por: y = x^2 - 9\,,\ y = 9 - x^2$$

a. Graficar el recinto de integración dado.

b. PLANTEAR (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable x y luego por la variable y: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

c. PLANTEAR (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable y luego por la variable x: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$



b) $\iint_R f(x,y)dx\,dy = \int_0^9 \int_{-\sqrt{9-y}}^{\sqrt{9-y}} f(x,y)dx\,dy + \int_{-9}^0 \int_{-\sqrt{y+9}}^{\sqrt{y+9}} f(x,y)dx\,dy$

c) $\iint_R f(x,y)dx\,dy = \int_{-3}^3 \int_{x^2-9}^{9-x^2} f(x,y)dydx$

EJERCICIO 4

a. La siguiente EDO de primer orden $\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2+1)x}{(x-1)y^3}$ es de tipo:

$$\frac{y^3}{(y^2+1)}dy = \frac{x}{(x-1)}dx$$

Variables Separables

b. La siguiente EDO de primer orden $\left(\frac{5}{1+x^2} + 2y\right)dx + 2x\,dy = 0$ es de tipo:

$P(x,y) = \frac{5}{1+x^2} + 2y$ $\qquad$ $\mathrm{Q(x,y)} = 2x$

$$P'_y = Q'_x = 2$$

Exacta

EJERCICIO 5

JUSTIFICAR RIGUROSAMENTE CADA UNA DE LAS RESPUESTAS

Dado el siguiente modelo:

$$D(p) = -2p + 30$$
$$S(p) = 3p - 6$$
$$p'' = 0{,}2\,[D(p) - S(p)]$$

a) Deducir la trayectoria temporal del precio $p = p(t)$ si $p(0) = 15$ y p´(0)=4

b) La solución encontrada en el punto anterior ¿es estable?

$$p'' = 0{,}2\,[-2p + 30 - 3p + 6]$$
$$p'' = -p + 36/5$$
$$p'' + p = 36/5$$

Solución homogénea

$r^2 + 1 = 0 \;\rightarrow$ Raíces de la ecuación característica: $r_1 = i \quad r_2 = -i$

Solución homogénea: $p_H(t) = C_1 sen(t) + C_2 \cos(t)$

La raíces de la ecuación característica son complejas con parte real nula por lo tanto la solución es inestable

Solución complementaria

$g(t) = 36/5$ $\qquad$ *Propongo*: $\quad p_c = A \qquad p'_c = 0 \quad p''_c = 0$

Reemplazo en la EDO:

$A = 36/5 \Rightarrow \qquad p_c = 36/5$

Solución general $\qquad p_G = C_1 sen(t) + C_2 \cos(t) + 36/5$

Solución particular

$$p(0) = 15 \Rightarrow C_2 + \frac{36}{5} = 15 \Rightarrow C_2 = 39/5$$
$$p'(0) = 4 \;\Rightarrow C_1 = 4$$

$$p_p = 4sen(t) + 39/5 \cos(t) + 36/5$$

RESOLUCIÓN

2º PARCIAL

TEMA D

EJERCICIO 1

a) Calcular en función del parámetro a, todos los puntos críticos de la siguiente función: $f(x,y) = x^2 + (a^2+7)y^2 + 2xy + 5$

CPO

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2y = 0 \\ f'_y = 2y(a^2+7) + 2x = 0 \end{cases} \rightarrow$$

Para **cualquier valor de a** $\in \mathbb{R}$ **existe un único punto crítico** $\boldsymbol{P_0}$ = (0,0)

b) Determinar, mediante la condición de suficiencia si los puntos encontrados en a) son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura.

CSO

$f''_{xx} = 2$ $\qquad$ $f''_{xy} = 2$ $\qquad$ $f''_{yy} = 2(a^2+7)$

$H = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2(a^2+7) \end{vmatrix} = 4(a^2+7) - 4 = 4a^2 + 24 > 0 \rightarrow$ **Existe extremo para cualquier valor de a** $\in \mathbb{R}$

$f''_{xx} = 2 > 0 \rightarrow$ **hay un mínimo relativos condicionado en** $\boldsymbol{P_0}$ **para cualquier valor de a** $\in \mathbb{R}$

EJERCICIO 2

JUSTIFICAR RIGUROSAMENTE CADA UNA DE LAS RESPUESTAS

a) Dada la función $z = x + y$ sujeta a: $xy = 1$ Hallar el/los puntos críticos mediante la condición necesaria del método de Lagrange. Armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por el/los puntos críticos y concluir.

$$L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(1 - xy)$$

Condiciones necesarias

$$\begin{cases} L'_x = 1 - \lambda y = 0 \\ L'_y = 1 - \lambda x = 0 \\ L'_\lambda = 1 - xy = 0 \end{cases} \Rightarrow Dos\ puntos\ críticos\text{:}\ \ (x_1, y_1, \lambda_1) = (1,1,1) \qquad (x_2, y_2, \lambda_2) = (-1,-1,-1)$$

Condición de suficiencia

$$H(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & -\lambda \\ x & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \det H < 0 \quad La\ función\ z = x + y\ \ alcanza\ un\ mínimo\ relativo\ condicionado\ en\ el\ punto\ (1,1)$$

$$H(-1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H > 0$$

$La\ función\ z = x + y\ \ alcanza\ un\ máximo\ relativo\ condicionado\ en\ el\ punto\ (-1,-1)$

b) Sea la función de utilidad $U(x_1, x_2)$ sujeta a una restricción de ingreso: $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Indicar como se interpreta un multiplicador λ cuyo valor óptimo es NEGATIVO.

En el problema planteado el λ óptimo esta relacionado con la utilidad marginal del ingreso en el punto optimo. Que el lambda sea negativo significa que ante incrementos pequeños del ingreso (I) la utilidad óptima disminuye, justificación:

$$\frac{\partial U_{óptima}}{\partial I} = \lambda_{óptimo}$$

El $\lambda_{óptimo}$ nos brinda información sobre la utilidad marginal con respecto al ingreso en el punto óptimo.

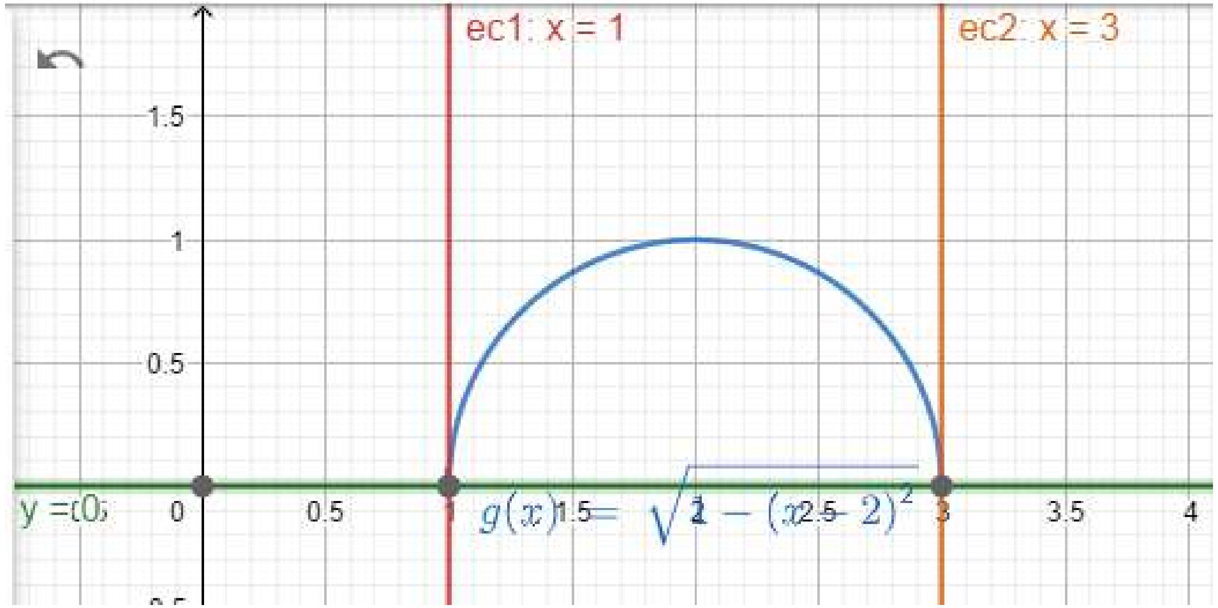
Si el $\lambda_{óptimo} < 0 \Rightarrow \frac{\partial U_{óptima}}{\partial I} < 0$ $\quad Ante\ pequeños\ incrementos\ del\ ingreso\ I\ la\ Utilidad\ óptima\ va\ a\ disminuir.$

EJERCICIO 3

Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad\qquad R = \left\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 / \; 0 \le y \le \sqrt{1-(x-2)^2} \wedge 1 \le x \le 3\right\}$$

a. Graficar el recinto de integración dado.



b. PLANTEAR (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable x y luego por la variable y:

$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}+2}^{+\sqrt{1-y^2}+2} f(x,y)dxdy$$

c. PLANTEAR (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable y luego por la variable x: $V = \iint_R f(x,y)\,dy\,dy$

$$\int_1^3 \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} f(x,y)dydx$$

EJERCICIO 4

a. La siguiente EDO de primer orden $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2+2y}{2x^2y+2x}$ es de tipo (JUSTIFICAR):

a. Lineal

b. Exacta

c. Bernoulli

d. Variables Separables

$$(2x^2y + 2x)dy + (2xy^2 + 2y)dx = 0$$

$$P(x,y) = 2xy^2 + 2\mathrm{y} \Rightarrow P'_y = 4xy + 2$$
$$Q(x,y) = 2x^2y + 2x \Rightarrow Q'_x = 4xy + 2$$

$P'_y = Q'_x$ Cumple la condición de simetría por lo tanto la ecuación diferencial es EXACTA

EJERCICIO 4

b) La siguiente EDO de primer orden $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^3} - \frac{2y}{x}$ es de tipo (JUSTIFICAR):

a. Bernoulli

b. Lineal

c. Exacta

d. Variables Separables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^3} - \frac{2y}{x}$$

$$y' = \frac{y^3}{x^3} - \frac{2y}{x}$$

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^3} \Rightarrow Ecuación\ diferencial\ BERNOULLI$$

EJERCICIO 5

Al estudiar el modelo econométrico de Phillips se presenta la ecuación diferencial $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 4 + 2t$.

a) Encontrar la solución $y = f(t)$ si $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$

$\boldsymbol{y_h}$: $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

$r^2 + r + \frac{1}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = r_2 = -1/2$

$$y_h = C_1\, e^{-\frac{1}{2}t} + C_2\, t\, e^{-\frac{1}{2}t}$$

$\boldsymbol{y_p}$: $\mathrm{g(t)} = 4 + 2t$

$y_p = At + B \qquad y'_p = A \qquad y''_p = 0$

$$0 + A + \frac{1}{4}(At + B) = 4 + 2t$$

$\begin{cases} \frac{1}{4}At = 2t \\ A + \frac{1}{4}B = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} A = 8 \\ B = -16 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad y_p = 8t - 16$

$$\boldsymbol{y_{SG} = C_1\, e^{-\frac{1}{2}t} + C_2\, t\, e^{-\frac{1}{2}t} + 8t - 16}$$

$\boldsymbol{y(0) = 2} \quad 2 = C_1 - 16 \quad \rightarrow \quad C_1 = 18$

$\boldsymbol{y'(0) = 1} \quad 1 = -\frac{1}{2}C_1 + C_2 + 8 \quad \rightarrow \quad C_2 = 1$

$$\boldsymbol{y_{SP} = 18\, e^{-\frac{1}{2}t} + t\, e^{-\frac{1}{2}t} + 8t - 16}$$

b) La solución encontrada en el punto anterior ¿es estable?

La solución encontrada es ESTABLE porque ambas raíces son negativas