ANÁLISIS MATEMÁTICO II (284)

Docente: Verónica García Fronti
Cátedra: María José Bianco
Sede: Paternal

RESOLUCIÓN

2º PARCIAL

TEMA A

EJERCICIO 1

Sea $\boldsymbol{f(x;y) = x^3 + 3y^2 - 3xy}$

a. Encontrar los puntos críticos de la función.

b. Mediante la condición de suficiencia indicar si los puntos críticos encontrados son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura.

a) Condiciones necesarias (1 orden):

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 6y - 3x = 0 \end{cases}$$

$$Puntos\ críticos: (0{,}0)\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

b) Condiciones suficientes (2 orden)

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$|H(0{,}0)| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -9 < 0.$ El punto (0,0) es un punto de ensilladura (NO es extremo relativo)

$\left|H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right| = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 9 > 0.$ Hay extremo en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Como $f''_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 3 > 0.$

La función dada presenta un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

EJERCICIO 2

Dada la siguiente función de producción $P(K,L) = L^{\alpha}K$ donde K representa las unidades de capital y L de trabajo; y dados los siguientes precios de los insumos $p_K = 5$ y $p_L = 10$ y dispone de \$700 para invertir en los insumos capital y trabajo.

a) En caso de existir, hallar el/ los puntos críticos que maximizan la producción bajo la restricción de costo y armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por los puntos críticos y concluir <u>en qué condiciones de α se encuentra un máximo condicionado</u>.

b) **<u>Sin resolver nuevamente</u>**, justificando la estimación, ¿Cuál será la nueva producción óptima si dispone de 730?

$$L(L,K,\lambda) = L^{\alpha}K + \lambda(700 - 5K - 10L)$$

Condición necesaria

$$\begin{cases} L'_L = \alpha L^{\alpha-1}K - 10\lambda = 0 \\ K'_L = L^{\alpha} - 5 = 0 \\ \quad 700 - 5K - 10L = 0 \end{cases} \qquad Punto\ crítico:\ \boldsymbol{L^*} = \frac{\boldsymbol{70\alpha}}{\boldsymbol{1+\alpha}} \qquad \boldsymbol{K^*} = \frac{\boldsymbol{140}}{\boldsymbol{1+\alpha}}$$

Condición suficiente

$$|\bar{H}(L^*,K^*)| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & \alpha(\alpha-1){L^*}^{\alpha-2}K^* & \alpha {L^*}^{\alpha-1} \\ 10 & \alpha {L^*}^{\alpha-1} & 0 \end{vmatrix} = -5(-10)\,\alpha {L^*}^{\alpha-1} + 10\left(5\alpha {L^*}^{\alpha-1} - 10\alpha(\alpha-1){L^*}^{\alpha-2}K^*\right) = -100\alpha(\alpha-1){L^*}^{\alpha-2}K^*$$

Para que $|\bar{H}(L^*,K^*)| > 0 \quad \Rightarrow 0 < \alpha < 1$

EJERCICIO 2

Dada la siguiente función de producción $P(K,L) = L^{\alpha}K$ donde K representa las unidades de capital y L de trabajo; y dados los siguientes precios de los insumo $p_K = 5$ y $p_L = 10$ y dispone de $700 para invertir en los insumos capital y trabajo.

a) En caso de existir, hallar el/ los puntos críticos que maximizan la producción bajo la restricción de costo y armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por lo puntos críticos y concluir en qué condiciones de α se encuentra un máximo condicionado.

b) **Sin resolver nuevamente**, justificando la estimación, ¿Cuál será la nueva producción óptima si dispone de 730?

$$L(L,K,\lambda) = L^{\alpha}K + \lambda(700 - 5K - 10L)$$

a)

Condición necesaria

$$\begin{cases} L'_L = \alpha L^{\alpha-1}K - 10\lambda = 0 \\ K'_L = L^{\alpha} - 5 = 0 \\ \quad 700 - 5K - 10L = 0 \end{cases} \qquad Punto\ crítico\text{: } \boldsymbol{L^*} = \frac{\mathbf{70\alpha}}{\mathbf{1+\alpha}} \qquad \boldsymbol{K^*} = \frac{\mathbf{140}}{\mathbf{1+\alpha}} \quad \boldsymbol{\lambda^*} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\left(\frac{\mathbf{70\alpha}}{\mathbf{1+\alpha}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}} \ \boldsymbol{P^*} = \left(\frac{\mathbf{70\alpha}}{\mathbf{1+\alpha}}\right)^{\boldsymbol{\alpha}}\left(\frac{\mathbf{140}}{\mathbf{1+\alpha}}\right)$$

Condición suficiente

$$|\bar{H}(L^*,K^*)| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & \alpha(\alpha-1){L^*}^{\alpha-2}K^* & \alpha {L^*}^{\alpha-1} \\ 10 & \alpha {L^*}^{\alpha-1} & 0 \end{vmatrix} = -5(-10)\,\alpha {L^*}^{\alpha-1} + 10\left(5\alpha {L^*}^{\alpha-1} - 10\alpha(\alpha-1){L^*}^{\alpha-2}K^*\right)$$

Para que $|\bar{H}(L^*,K^*)| > 0 \quad \Rightarrow 0 < \alpha < 1$

EJERCICIO 2 (continuación)

Dada la siguiente función de producción $P(K,L) = L^{\alpha}K$ donde K representa las unidades de capital y L de trabajo; y dados los siguientes precios de los insumos $p_K = 5$ y $p_L = 10$ y dispone de \$700 para invertir en los insumos capital y trabajo.

a) En caso de existir, hallar el/ los puntos críticos que maximizan la producción bajo la restricción de costo y armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por los puntos críticos y concluir en qué condiciones de α se encuentra un máximo condicionado.

b) **Sin resolver nuevamente**, justificando la estimación, ¿Cuál será la nueva producción óptima si dispone de 730?

$$L(L,K,\lambda) = L^{\alpha}K + \lambda(700 - 5K - 10L)$$

$$\boldsymbol{\lambda^* = \frac{1}{5}\left(\frac{70\alpha}{1+\alpha}\right)^{\alpha}}$$

$$\frac{dP^*}{30} = \frac{1}{5}\left(\frac{70\alpha}{1+\alpha}\right)^{\alpha} \Rightarrow P_{Nueva} = \frac{1}{5}\left(\frac{70\alpha}{1+\alpha}\right)^{\alpha} * 30 + \left(\frac{70\alpha}{1+\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{140}{1+\alpha}\right)$$

EJERCICIO 3

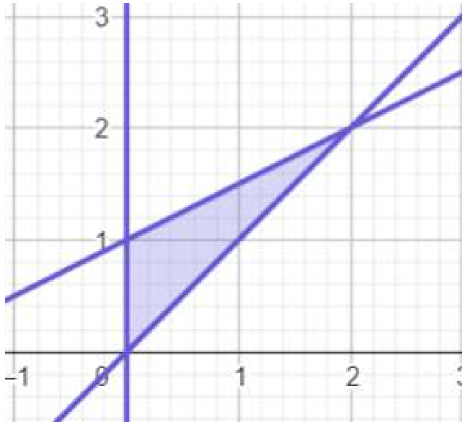
Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ $\quad$ $R = Región\ encerrada\ por\ las\ siguientes\ tres\ curvas\colon\ y = x\ ,\quad x = 2y - 2\ ,\quad x = 0.$

Graficar el recinto de integración y:

a) **Plantear** la integral doble si se integra primero por la variable x y luego por la variable y.

b) **Plantear** la integral doble si se integra primero por la variable y luego por la variable x.



a) $\int_0^1 \left[\int_0^y f(x,y)dx\right] dy + \int_1^2 \left[\int_{2y-2}^{y} f(x,y)dx\right] dy$

b) $\int_0^2 \left[\int_x^{\frac{x}{2}+1} f(x,y)dy\right] dx$

EJERCICIO 4

Dada la siguiente ecuación diferencial: $\boldsymbol{(x^3 - y^3)dx + xy^2 dy = 0}$.

a) Demostrar que $C = \frac{y^3}{3x^3} + \ln|x|$ es solución general. Justificar detalladamente.

b) Hallar la solución particular si y(1)=2

$$\boldsymbol{(x^3 - y^3)dx + xy^2 dy = 0}$$

EDO Homogénea de grado 3

Divido ambos términos por $\boldsymbol{x^3}$:

$$\boldsymbol{\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^3\right)dx + \left(\frac{y}{x}\right)^2 dy = 0}$$

Propongo la sustitución $v = \frac{y}{x}$: $\quad dy = vdx + xdv$

$$(1 - v^3)dx + v^2(vdx + xdv) = 0$$
$$1dx + v^2 xdv = 0$$

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int v^2 dv \Rightarrow ln|x| = -\frac{v^3}{3} + C \Rightarrow a)\ SOLUCIÓN\ GENERARL:\ \ ln|x| + \frac{y^3}{3x^3} = C$$

b) $ln|1| + \frac{2^3}{3} = C \Rightarrow C = \frac{8}{3}$ $\qquad SOLUCIÓN\ PARTICULAR::\ \ ln|x| + \frac{y^3}{3x^3} = \frac{8}{3}$

EJERCICIO 5

Al estudiar el modelo econométrico de Phillips se presenta la ecuación diferencial $\boldsymbol{p''+p'=4+2t}$.

a. Encontrar la solución general $p_{SG}=f(t)$ de la ecuación diferencial dada.
b. Analizar la estabilidad de la solución encontrada.

Solución homogénea:
Propongo: $p_H(t)=e^{rt}$ $\quad r^2e^{rt}+re^{rt}=0 \;\Rightarrow e^{rt}(r^2+r)=0 \quad r_1=0 \quad r_2=-1$
Solución homogénea: $p_H(t)=C_1+C_2e^{-t}$

Solución complementaria:
Propongo: $p_C(t)=At+Bt^2 \quad p\acute{}_C(t)=A+2Bt \qquad p\acute{}\acute{}_C(t)=2B$
Reemplazo:

$$2B+A+2Bt=4+2t \quad \Rightarrow A=2 \quad B=1$$

Solución complementaria: $p_C(t)=2t+t^2$

a) Solución general: $p_G(t)=C_1+C_2e^{-t}+2t+t^2$

b) La solución dada es inestable, ya que no se cumple que ambas raíces sean negativas.

RESOLUCIÓN

2º PARCIAL

TEMA B

EJERCICIO 1

Sea $f(x; y) = \boldsymbol{6x^2} + \boldsymbol{2y^3} - \boldsymbol{6xy}$

a. Encontrar los puntos críticos de la función.

$$\begin{cases} f'_x = 12x - 6y = 0 \quad (1) \\ f'_y = 6y^2 - 6x = 0 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) $x = \frac{1}{2}y$

Reemplazo en (2):

$$6y^2 - 3y = 0$$

$$y(2y - 1) = 0 \ \rightarrow \ \boldsymbol{P_1} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \text{ y } \ \boldsymbol{P_2} = (\tfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}, \tfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}})$$

b. Mediante la condición de suficiencia indicar si los puntos críticos encontrados son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura.

$$f''_{xx} = 12$$
$$f''_{yx} = -6$$
$$f''_{yy} = 12\,y$$

$$\boldsymbol{P_1} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36$$

Hay un punto de ensilladura en $\boldsymbol{P_1}$

$$\boldsymbol{P_2} = (\tfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}, \tfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}})$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

Existe un mínimo en $\boldsymbol{P_2}$

EJERCICIO 2

Dada la siguiente función de utilidad $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$ donde x_1 representa las unidades consumidas del bien 1 y x_2 las del bien 2; y dados los siguientes precios $p_1 = 2$ y $p_2 = 4$ y dispone de un de $1000 gastar entre los dos bienes.

a. En caso de existir, hallar el/ los puntos críticos que maximizan la utilidad bajo la restricción dada y armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por los puntos críticos y determinar los valores de α y β para los cuales en el óptimo convenga consumir el doble del bien 1 que del bien 2. Es decir, $x_1 = 2x_2$.

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta} + \lambda(1000 - 2x_1 - 4x_2)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x1} = \alpha x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta} - 2\lambda = 0 \quad (1) \\ \mathcal{L}'_{x2} = \beta x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-1} - 4\lambda = 0 \quad (2) \\ \mathcal{L}'_{\lambda} = 1000 - 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ 2x_2 = \frac{\beta}{\alpha} x_1$$

para que verifique $\boldsymbol{x_1 = 2x_2, \alpha = \beta}$

$$\boxed{\begin{gathered} \lambda^* = \frac{\alpha}{2} 62{,}5^{\alpha-1} 125^{\alpha} \\ x_1^* = 62{,}5 \\ x_2^* = 125 \end{gathered}}$$

$$\mathcal{L}''_{x1x1} = \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}\, x_2^{\beta}$$
$$\mathcal{L}''_{x1x2} = \alpha\, \beta\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta-1} = \alpha^2\;\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta-1}$$
$$\mathcal{L}''_{x2x2} = \beta(\beta-1)x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-2} = \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-2}$$

$$\widetilde{H} = \begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}\, x_2^{\beta} & \alpha^2\;\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta-1} & -2 \\ \alpha^2\;\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta-1} & \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-2} & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 8\alpha^2\;\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta-1} + 8\alpha^2\;\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta-1} - 4\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-2}$$
$$-16\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}\, x_2^{\beta}$$

Para que $\widetilde{H}$>0 necesito que $0 < \alpha < 1$

a. **Sin resolver nuevamente**, justificando la estimación, ¿Cuál será el nuevo nivel de utilidad si dispone de \$1010 para gastar?

$$U_2^* = U_1^* + 10 * \lambda^*$$

EJERCICIO 3

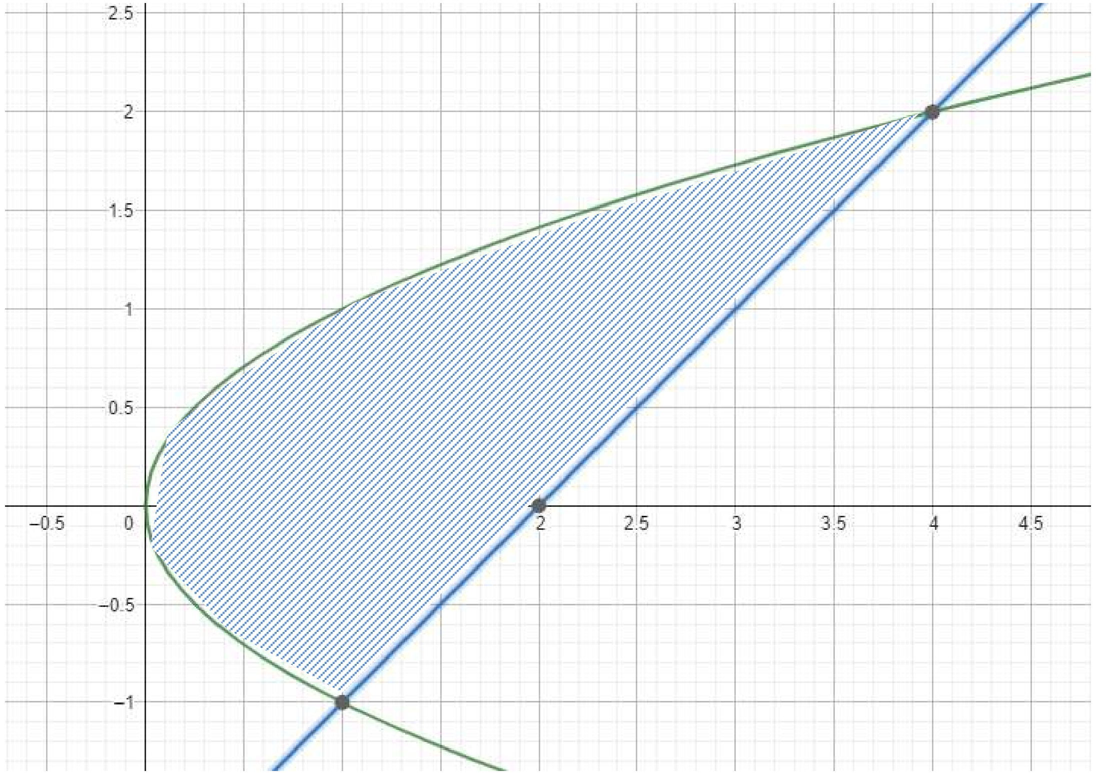
Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

$V = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy \qquad R = Región\ encerrada\ por\ las\ siguientes\ tres\ curvas$: $x = y^2$, $y = x - 2$.

Graficar el recinto de integración dado y:

Plantear la integral doble si se integra primero por la variable x y luego por la variable y

Plantear la integral doble si se integra primero por la variable y luego por la variable x.



$$\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx\, dy =$$

$$\int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{+\sqrt{x}} f(x,y)dy\, dx + \int_1^4\int_{x-2}^{+\sqrt{x}} f(x,y)dy\, dx$$

EJERCICIO 4

Dada la siguiente ecuación diferencial: $\boldsymbol{xy' + y = x^2y^2}$.
a. Demostrar que $xy(C-x)=1$ es solución general. Justificar detalladamente.

$$xy' + y = x^2y^2$$

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2$$

Bernoulli

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = x$$

$$\frac{z'}{-1} + \frac{1}{x}\,z = x$$

$$z' - \frac{1}{x}z = -x$$

$$u'v + v'u - \frac{1}{x}uv = -x$$

$$v\left(u' - \frac{1}{x}u\right) + v'u = -x$$

$$u' - \frac{1}{x}u = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln u = \ln x$$

$$u = x$$

$$\frac{dv}{dx}\,x = -x$$

$$dv = -dx$$

$$v = -x + C$$

$$\boxed{\begin{gathered} y^{-1} = x(-x+C) \\ 1 = xy(C-x) \end{gathered}}$$

a. Hallar la solución particular si y(1)=2

$$1 = xy(C - x)$$
$$1 = 1.2(C - 1)$$
$$\frac{1}{2} + 1 = C$$
$$C = 3/2$$

$$\boxed{1 = xy(\frac{3}{2} - x)}$$

EJERCICIO 5

Al estudiar el modelo de Samuelson se presenta la ecuación diferencial $\boldsymbol{I'' = -4I + 2}$**.** Siendo I el nivel de inversión e $I = f(t)$.

a. Encontrar la solución general $I_{SG} = f(t)$ de la ecuación diferencial dada.

$$\boldsymbol{I'' + 4I = 2}$$

$\boldsymbol{I_h}$ $\quad \boldsymbol{I'' + 4I = 0}$

$$r^2 + 4 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm 4i$$

$$I_h = Asen\ 2t + Bcos\ 2t$$

$\boldsymbol{I_c}$ $\quad \boldsymbol{f(t) = 2}$

$I_c = A \quad I'_c = 0 \quad I''_c = 0$

$$0 + 4A = 2$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{I_{sg} = Asen\ 2t + Bcos\ 2t + \frac{1}{2}}$$

b. Analizar la estabilidad de la solución encontrada.

La solución no es estable por la parte rea de la raíz encontrada no es negativa.