Examen de Análisis Matemático I — Sede Ramos Mejía — 28/02/2020
Cátedra Zorzoli — Tema 2

DNI	Apellido	Nombre	Profesor/a

Para aprobar el examen es necesario tener **TRES** ejercicios bien, teniendo al menos un Ejercicio bien de la parte teórica y **un** ejercicio bien de la parte práctica

<u>Parte Teórica</u>: (elegir SÓLO 2 (dos) ejercicios para desarrollar)

a) Demuestre, usando el cálculo de límites pertinente, que existe algún valor de $m > 0$ para el cual la función no tiene una asíntota vertical en $x = m$. Especifique esos valores de m.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - m^2}$$

b) Considere la función $g(x) = 2\sqrt{x} + ax$. Use la definición de derivada para calcular $g'(x)$ y úsela para demostrar que con $a > 0, g(x)$ es estrictamente creciente para $x > 0$.

c) Demuestre que: $\int_0^1 \frac{sen(\sqrt{bx})}{\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{\sqrt{b}} \cdot \left(cos\sqrt{b} - 1\right)$.

<u>Parte Práctica</u>: (elegir SÓLO 3 (tres) ejercicios para desarrollar)

EJ 1: Tome en cuenta que $x = 6e^{-12p^2}$ es la ecuación de demanda de un bien.

a) Calcule para qué nivel de precio se maximiza el ingreso, e indique cuál es dicho ingreso

b) Halle el precio y la cantidad para una elasticidad de $\frac{-1}{6}$.

EJ 2: El ingreso marginal de una empresa está dado por la función $I' = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1000}}$

Se pide:

c) Halle la función ingreso, sabiendo que $I(0) = 0$

d) Halle la función de demanda.

EJ 3: Calcule la siguiente integral

$$\int_1^e x^{-6}. lnx. dx$$

EJ 4: Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función. Justificar

$$q(x) = -\frac{27}{x} + \frac{x^2}{2}$$

RESOLUCIÓN

Parte Teórica:

a) Demuestre, usando el cálculo de límites pertinente, que existe algún valor de $m > 0$ para el cual la función no tiene una asíntota vertical en $x = m$. Especifique esos valores de m.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - m^2}$$

Recordemos que para que la recta de ecuación $x = m$ sea asíntota vertical de f debe verificarse

$$\boxed{\lim_{x \to m} f(x) = \pm\infty}$$

Factorizando la función dada tenemos que

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - m^2} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-m)(x+m)}$$

Por lo que para que f **no** tenga asíntota vertical en $x = m$, m puede tomar dos valores. A saber, $x = 2 \lor x = 3$

Analicemos los límites en $x = 2$ y $x = 3$

En $x = 2$

$$L = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)}{(x+3)} = \frac{-1}{4}$$

En $x = 3$

$$L = \lim_{x \to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x+3)} = \frac{0}{5} = 0$$

Para cualquier otro valor de $m > 0$, tendrá asíntota vertical. Por ejemplo para $x = 4$

$$L = \lim_{x \to 4} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-4)(x+4)} = \frac{(2)(1)}{\to 0} = \infty$$

b) Considere la función $g(x) = 2\sqrt{x} + ax$. Use la definición de derivada para calcular $g'(x)$ y úsela para demostrar que con $a > 0$, $g(x)$ es estrictamente creciente para $x > 0$.

Por definición,

$$\boldsymbol{g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}$$

$$g(x) = 2\sqrt{x} + ax \Longrightarrow g(x+h) = 2\sqrt{x+h} + a(x+h)$$

$$g'(x) = L = \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{x+h} + a(x+h) - \left(2\sqrt{x} + ax\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{x+h} + ax + ah - 2\sqrt{x} - ax}{h}$$

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{x+h} + ah - 2\sqrt{x}}{h}$$

Se presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Multiplicamos numerador y denominador por el binomio conjugado del numerador

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\left(2\sqrt{x+h}\right) + \left(ah - 2\sqrt{x}\right)\right]}{h} \frac{\left[\left(2\sqrt{x+h}\right) - \left(ah - 2\sqrt{x}\right)\right]}{\left[\left(2\sqrt{x+h}\right) - \left(ah - 2\sqrt{x}\right)\right]}$$

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{\left(2\sqrt{x+h}\right)^2 - \left(ah - 2\sqrt{x}\right)^2}{h\left[\left(2\sqrt{x+h}\right) - \left(ah - 2\sqrt{x}\right)\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{4\left(\sqrt{x+h}\right)^2 - \left(a^2h^2 - 4ah\sqrt{x} + 4\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}{h\left[\left(2\sqrt{x+h}\right) - \left(ah - 2\sqrt{x}\right)\right]}$$

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h) - \left(a^2h^2 - 4ah\sqrt{x} + 4x\right)}{h\left[\left(2\sqrt{x+h}\right) - \left(ah - 2\sqrt{x}\right)\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{4x + 4h - a^2h^2 + 4ah\sqrt{x} - 4x}{h\left[\left(2\sqrt{x+h}\right) - \left(ah - 2\sqrt{x}\right)\right]}$$

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{4h - a^2h^2 + 4ah\sqrt{x}}{h\left[\left(2\sqrt{x+h}\right) - \left(ah - 2\sqrt{x}\right)\right]} = \frac{h\left(4 - a^2h + 4a\sqrt{x}\right)}{h\left[\left(2\sqrt{x+h}\right) - \left(ah - 2\sqrt{x}\right)\right]}$$

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{\left(4 - a^2h + 4a\sqrt{x}\right)}{\left(2\sqrt{x+h}\right) - \left(ah - 2\sqrt{x}\right)} = \frac{4 + 4a\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}} = \frac{4\left(1 + a\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}} = \frac{1 + a\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + a$$

Luego,

$$\boxed{\boldsymbol{g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + a}}$$

Para que g sea estrictamente creciente en su dominio $(x > 0)$ entonces $g'(x) > 0, \forall x > 0$

$$\sqrt{x} > 0 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

Si $a > 0 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + a > 0$ (ya que la suma de dos positivos es positivo)

$$\boldsymbol{x > 0 \ \wedge a > 0 \Longrightarrow g(x) es\ estrictamente\ creciente}$$

c) Demuestre que: $\int_0^1 \frac{sen(\sqrt{bx})}{\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{\sqrt{b}} \cdot \left(cos\sqrt{b} - 1\right).$[1]

Resolvemos la integral por el método de sustitución

$$\boldsymbol{t = \sqrt{bx}}$$

$$dt = \frac{b}{2\sqrt{bx}} dx \Longrightarrow \boldsymbol{dx = \frac{2\sqrt{bx}}{b}.dt}$$

$$I = \int \frac{sen(\sqrt{bx})}{\sqrt{x}} dx \Longrightarrow I = \int \frac{sen(\boldsymbol{t})}{\sqrt{x}} \frac{\boldsymbol{2\sqrt{bx}}}{\boldsymbol{b}}.\boldsymbol{dt} = \int \frac{sen(t)}{b\sqrt{x}} 2\sqrt{b}\sqrt{x}.dt$$

$$I = \int \frac{2}{b} sen(t)\sqrt{b}dt = \frac{2}{\sqrt{b}} \int sen(t).dt = -\frac{2}{\sqrt{b}} \cos(t) + c$$

$$\boldsymbol{I = -\frac{2}{\sqrt{b}} \cos\left(\sqrt{bx}\right) + c}$$

Ahora aplicamos la regla de Barrow para resolver la integral definida

$$I = \int_0^1 \frac{sen(\sqrt{bx})}{\sqrt{x}} dx = \boldsymbol{-\frac{2}{\sqrt{b}} \cos\left(\sqrt{bx}\right)}\Bigg|_0^1 = \boldsymbol{g(1) - g(0)}$$

$$\boldsymbol{g(x) = -\frac{2}{\sqrt{b}} \cos\left(\sqrt{bx}\right) = \begin{cases} g(1) = -\frac{2}{\sqrt{b}} \cos\left(\sqrt{b}\right) \\ g(0) = \frac{-2}{\sqrt{b}} \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{I = -\frac{2}{\sqrt{b}} \cos\left(\sqrt{b}\right) + \frac{2}{\sqrt{b}}} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{I = -\frac{2}{\sqrt{b}} \left(\cos\left(\sqrt{b}\right) - 1\right)}}$$

<u>Parte Práctica</u>:

EJ 1: Tome en cuenta que $x = 6e^{-12p^2}$ es la ecuación de demanda de un bien.

a) Calcule para qué nivel de precio se maximiza el ingreso, e indique cuál es dicho ingreso

b) Halle el precio y la cantidad para una elasticidad de $\frac{-1}{6}$.

a) El ingreso viene dado por $\boxed{\boldsymbol{I(x) = p.x}}$

En este caso vamos a expresar el ingreso en función del precio: $I(p) = p.x$

[1] En el parcial figura $\frac{-2}{\sqrt{a}}$ pero debe decir $\frac{-2}{\sqrt{b}}$

$$\boxed{\boldsymbol{I(p) = p\left(6e^{-12p^2}\right)}}$$

Derivamos la función y la igualamos a cero para encontrar los puntos críticos

$$I'(p) = 6e^{-12p^2} + p.6e^{-12p^2}(-24p)$$
$$\boxed{\boldsymbol{I'(p) = 6e^{-12p^2}(1 - 24p^2)}}$$

Igualamos a cero teniendo en cuenta que $e^{-12p^2} \neq 0, \forall p \in \mathbb{R}$

$$1 - 24p^2 = 0 \Longrightarrow p^2 = \frac{1}{24} \Longrightarrow |p| = \sqrt{\frac{1}{24}} \Longrightarrow |p| = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{24}}{24} = \frac{2\sqrt{6}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{12} \cong 0{,}204$$

Por tratarse de una función económica no consideramos el valor negativo de p, por lo que el único punto crítico es $p = \frac{\sqrt{6}}{12}$

Analizamos ahora el signo de la función derivada en cada uno de los intervalos en los que queda dividido el dominio de $I(p)$ a partir del punto crítico y considerando que la función toma valores positivos por tratarse de una función económica

$$I'(p) = 6e^{-12p^2}(1 - 24p^2)$$

	$\left(0, \frac{\sqrt{6}}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{12}$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{12}, +\infty\right)$
Signo de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Comportamiento de la función	↗	Máx. relativo	↘

Por lo tanto el ingreso se maximiza para un precio de $\frac{\sqrt{6}}{12}$ unidades monetarias. Dicho ingreso es igual a

$$I\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{12}.\left(6e^{-12\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2}\right) = 0{,}7428$$

b) La elasticidad respecto del precio viene dada por $\boxed{\boldsymbol{\eta = \left|\frac{Ex}{Ep}\right| = \frac{p}{x} \cdot x'}}$

$$\eta = \frac{p}{x} \cdot x' = \frac{p}{6e^{-12p^2}} \cdot 6e^{-12p^2}(-24p) = -24p^2$$

$$-24p^2 = -\frac{1}{6} \Longrightarrow p^2 = \frac{1}{144} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{p = \frac{1}{12} \cong 0{,}0833}}$$

La cantidad la calculamos evaluando la función demanda en $p = \frac{1}{12}$

$$D(p) = x = 6e^{-12p^2}$$

$$x = D\left(\frac{1}{12}\right) = 6e^{-12\left(\frac{1}{12}\right)^2} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 6e^{-\frac{1}{12}} \cong 5,5203}}$$

EJ 2: El ingreso marginal de una empresa está dado por la función $I' = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1000}}$

Se pide:

c) Halle la función ingreso, sabiendo que $I(0) = 0$ [2]

d) Halle la función de demanda.

c) Integramos la función ingreso marginal para obtener la función ingreso total. Para resolver estar integral recurrimos al método de sustitución

$$t = x^2 + 1000$$

$$dt = 2xdx \Longrightarrow dx = \frac{dt}{2x}$$

$$I(x) = \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1000}} dx = \int \frac{x}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{3}}.dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} + c$$

$$I(x) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{t^2} + c = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2 + 1000)^2} + c$$

$$Si\ I(0) = 0 \Longrightarrow \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1000)^2} + c = 0 \Longrightarrow c = 75$$

$$\boxed{\boldsymbol{I(x) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1000)^2} + 75}}$$

d) La función ingreso viene dada por $I(x) = p.x$ siendo $p = D(x)$ la función demanda, por lo que podemos plantear

$$I(x) = D(x).x \Longrightarrow D(x) = \frac{I(x)}{x}$$

$$D(x) = \frac{\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1000)^2} + 75}{x} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{D(x) = \frac{3\sqrt[3]{(1000)^2}}{4x} + \frac{75}{x}}}$$

EJ 3: Calcule la siguiente integral

[2] En el examen figura $I(x) = 0$ pero debe decir $I(0) = 0$

$$\int_{1}^{e} x^{-6}.\,lnx.\,dx$$

Para resolver esta integral usamos el método de integración por partes. Eligiendo $u = Lnx$ tenemos que:

$u = Lnx$	$dv = x^{-6}$
$du = \frac{1}{x}dx$	$v = -\frac{1}{5x^5}$

La fórmula para este método es: $\boxed{\boldsymbol{u.v - \int v.du}}$

$$I = Lnx\left(-\frac{1}{5x^5}\right) - \int -\frac{1}{5x^5}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{-Lnx}{5x^5} + \int \frac{1}{5x^6}dx$$

$$I^* = \int \frac{1}{5x^6}dx = \frac{1}{5}\int x^6 dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{7} + c = \frac{x^7}{35} + c$$

Por lo tanto,

$$\boxed{I = \frac{-Lnx}{5x^5} + \frac{x^7}{35} + c}$$

Aplicamos el teorema de Barrow para resolver la integral definida

$$I = \int_{1}^{e} x^{-6}.\,lnx.\,dx = \left(\frac{-Lnx}{5x^5} + \frac{x^7}{35}\right)\Bigg|_{1}^{e} = g(e) - g(1)$$

$$g(x) = \frac{-Lnx}{5x^5} + \frac{x^7}{35}\begin{cases} g(e) = \frac{-Lne}{5e^5} + \frac{e^7}{35} = \frac{-1}{5e^5} + \frac{e^7}{35} \\ g(1) = \frac{-Ln(1)}{5(1)^5} + \frac{1^7}{35} = \frac{1}{35} \end{cases}$$

$$I = g(e) - g(1) = \frac{-1}{5e^5} + \frac{e^7}{35} - \frac{1}{35} = \frac{-1}{5e^5} + \frac{e^7 - 1}{35}$$

$$\boxed{I \cong 31,302}$$

EJ 4: Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función. Justificar

$$q(x) = -\frac{27}{x} + \frac{x^2}{2}$$

Resulta más fácil trabajar con esta función si la escribimos como un único cociente de funciones

$$q(x) = \frac{-54 + x^3}{2x} = \frac{x^3 - 54}{2x}$$

En primera instancia, $\boxed{\boldsymbol{Dmq(x) = \mathbb{R} - \{0\}}}$

Su derivada es

$$q'(x) = \frac{3x^2(2x) - (x^3 - 54).2}{(2x)^2} = \frac{6x^3 - 2x^3 + 108}{4x^2} = \frac{4x^3 + 108}{4x^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{q'(x) = \frac{4x^3 + 108}{4x^2}}}$$

Igualamos esta expresión a cero para hallar los puntos críticos

$$\frac{4x^3 + 108}{4x^2} = 0 \Longrightarrow 4x^3 + 108 = 0 \Longrightarrow x^3 = -27 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{-27}$$

$$\boldsymbol{x = -3}$$

Analizamos el signo de la función derivada para determinar los intervalos de crecimiento y los extremos relativos. Recordemos que no solo tenemos que considerar el punto crítico hallado sino también el valor de $\boldsymbol{x}$ que no pertenece al dominio.

$$q'(x) = \frac{4x^3 + 108}{4x^2}$$

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	0	$+$	---	$+$
Comportamiento de la función	↘	Máx. relativo	↗		↗

La función presenta un máximo local en $\boldsymbol{x = -3}$, o sea en el punto $P = \left(-3, \frac{27}{2}\right)$

Para determinar los intervalos de concavidad tenemos que derivar la derivada, o sea, calcular la segunda derivada de la función.

$$q''(x) = \frac{12x^2(4x^2) - (4x^3 + 108).8x}{(4x^2)^2} = \frac{48x^4 - 32x^4 - 864x}{16x^4}$$

$$q''(x) = \frac{16x^4 - 864x}{16x^4}$$

Igualamos esta expresión a cero para hallar los puntos de inflexión

$$\frac{16x^4 - 864x}{16x^4} \Longrightarrow 16x^4 - 864x = 0 \Longrightarrow 16x(x^3 - 54) \Longrightarrow x = 0 \;\; \vee\, x = 3{,}77$$

Analizamos el signo de la derivada segunda (Debe considerarse $x = 0$, valor que no pertenece al dominio de la función). En este caso, dicho valor también es un punto de inflexión

$$q''(x) = \frac{16x(x^3 - 54)}{16x^4}$$

	$(-\infty, -3)$	0	$(-3{,}0)$	$3{,}77$	$(0, +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
Comportamiento de la función	$\cup$ Cóncava positiva (convexa)	No es punto de inflexión	$\cup$ Cóncava positiva (convexa)	Es punto de inflexión	$\cap$ Cóncava negativa