Matrices y sistemas lineales

Definiciones y propiedades

Matrices

Dados los números naturales m y n, una *matriz* de m filas y n columnas con coeficientes reales es un arreglo rectangular $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Llamamos *filas* de A a las n-uplas $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ con $i = 1, \dots, m$.
Llamamos *columnas* de A a las m-uplas $A^{(j)} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ con $j = 1, \dots, n$.

Con esta notación, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ y también $A = (A^{(1)}\ A^{(2)}\ \dots\ A^{(n)})$.

Al número que está en la fila i y la columna j de la matriz A lo llamamos *elemento* ij de A y lo notamos a_{ij}. Escribimos abreviadamente $A = (a_{ij})$.
Notamos $\mathbb{R}^{m \times n}$ al conjunto de las matrices de m filas y n columnas con coeficientes reales.
Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la *matriz transpuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ que tiene como filas a las columnas A.
Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *triangular superior (inferior)* si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ($i < j$, respectivamente) y es *diagonal* si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

En el conjunto $\mathbb{R}^{m \times n}$, están definidas la *suma* y el *producto por escalares* de la siguiente manera:
Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad\qquad kA = (ka_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Es decir, suma y producto por escalares se calculan elemento a elemento.
Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times s}$, se define el *producto* de A por B como

$$AB = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times s}$$

donde c_{ij} es igual al producto escalar de la fila i de A por la columna j de B

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$$

Es posible calcular AB si y solo si la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B.
Propiedades del producto de matrices.

- Es asociativo: $(AB)C = A(BC)$
- Es distributivo con respecto a la suma: $\begin{aligned} A(B+C) &= AB+AC \\ (A+B)C &= AC+BC \end{aligned}$
- La matriz *identidad* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verifica $AI = IA$ para toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La matriz I es el elemento neutro para el producto en $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Sistemas lineales

Un *sistema lineal* de m ecuaciones con n incógnitas es un conjunto de m ecuaciones en las variables $x_1, \dots, x_n$ del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde las a_{ij} y las b_i representan constantes.
Cuando $b_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, se dice que el sistema es *homogéneo*.
Una n-upla $(s_1, \dots, s_n)$ es una solución del sistema si y solo si al reemplazar x_j por s_j para cada $j = 1, \dots, n$, se satisfacen cada una de las m ecuaciones.
Un sistema se dice *incompatible* si no tiene ninguna solución y *compatible* si tiene alguna solución.
Un sistema lineal homogéneo siempre es compatible: $0 \in \mathbb{R}^n$ es una solución, que llamaremos la *solución trivial*.
Si un sistema compatible tiene una única solución es *determinado* y si tiene infinitas soluciones es *indeterminado*.

La *matriz de coeficientes* del sistema es $A = (a_{ij})$ y la *matriz ampliada* o *matriz aumentada* del sistema es $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Decimos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Propiedad. Las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema dan lugar a un sistema equivalente al dado:

1. Multiplicar una de las ecuaciones por una constante no nula.

2. Intercambiar dos de las ecuaciones.

3. Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra ecuación.

Las operaciones anteriores sobre las ecuaciones se corresponden con las siguientes operaciones sobre las filas de la matriz aumentada del sistema. Se denominan *operaciones elementales sobre las filas*:

1. Multiplicar una de las filas por una constante no nula.

2. Intercambiar dos de las filas.

3. Sumar un múltiplo de una de las filas a otra fila.

Se dice que una matriz se encuentra en la forma *escalonada en las filas reducida* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si una fila no consta únicamente de ceros, entonces su primer coeficiente no nulo es un 1 (a este 1 se lo denomina 1 principal).

2. Si existen filas que constan sólo de ceros (filas nulas), se agrupan en la parte inferior de la matriz.

3. Si dos filas sucesivas son no nulas, el 1 principal de la fila inferior se presenta más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.

4. Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz tiene solo las propiedades 1., 2. y 3. se dice que está en la forma *escalonada en las filas*.

Diremos que dos matrices son equivalentes por filas si puede obtenerse una de la otra por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre las filas.
El *método de eliminación de Gauss* para resolver sistemas lineales consiste en llevar la matriz aumentada del sistema planteado, vía la aplicación sistemática de operaciones elementales sobre sus filas, a la forma escalonada en las filas reducida. La resolución del sistema resultante, que es equivalente al original, es inmediata.
Llamamos *rango fila* (o *rango*) de la matriz A al número de filas no nulas que tiene la matriz escalonada en las filas reducida equivalente a A.

Teorema de Rouché-Frobenius. El sistema de matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$ es compatible si y solo si el rango de $(A|\mathbf{b})$ es igual al rango de A.

Notación. El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

puede escribirse $AX = B$, con

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}.$$

En adelante, identificaremos $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ con $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Así, el sistema se escribirá

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Propiedades. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ $(\mathbf{b} \neq 0)$,

$$\mathbb{S}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = 0\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{S}_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

a) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $k\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$.

   Esto dice que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución del mismo y que los múltiplos de una solución son también soluciones.

b) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$, entonces $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$.

   Esto es, la diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo es solución del sistema homogéneo asociado.

c) Si $\mathbf{s}$ es una solución particular del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (es decir, $\mathbf{s} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$), entonces

$$\mathbb{S}_{\mathbf{b}} = \mathbb{S}_0 + \mathbf{s} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s}, \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{S}_0\}.$$

Esto significa que cualquier solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede obtenerse sumando una solución particular del sistema con una solución del sistema homogéneo asociado.

Matrices inversibles

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *inversible* si existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$. Cuando B existe, es única. Se llama la *matriz inversa de* A y la notamos $B = A^{-1}$.
Propiedad. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son inversibles, entonces AC es inversible y vale $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.
Propiedad. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es inversible.

b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única, cualquiera sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

c) $A\mathbf{x} = 0$ tiene únicamente la solución trivial.

d) A es equivalente por filas a $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.