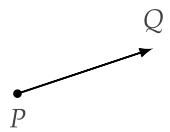
Práctica 1

Álgebra vectorial - Primera parte

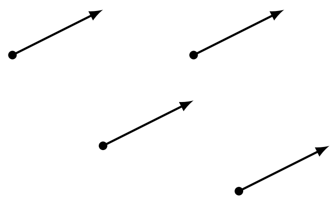
Definiciones y propiedades

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

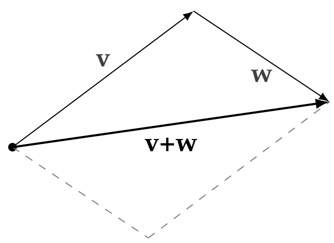
Una flecha que sirve para representar cantidades físicas (fuerzas, velocidades) es un *vector*. Para dar un vector necesitamos un *origen* (P) y un *extremo* (Q) que lo determinan totalmente, proporcionando su dirección, longitud y sentido.



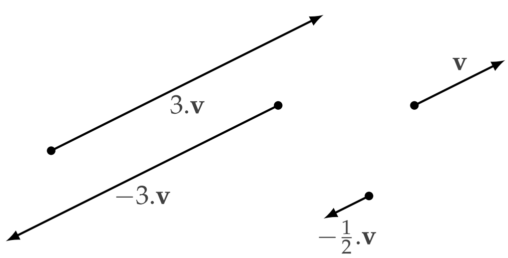
Vectores equivalentes son los que tienen igual dirección, longitud y sentido. Los siguientes vectores son todos equivalentes:



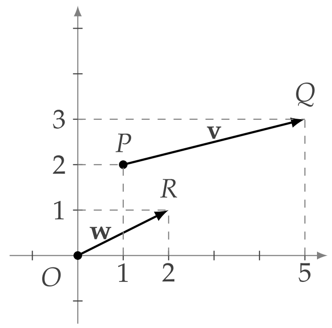
Los vectores se pueden sumar. La suma, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es equivalente a una de las diagonales del paralelogramo de lados $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$:



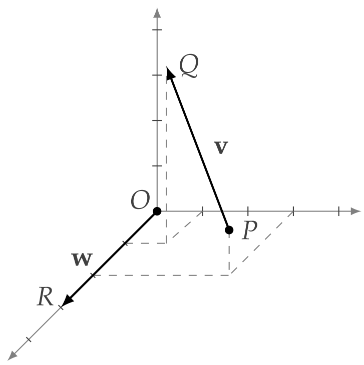
También se puede multiplicar un vector por un número (escalar). El resultado es un vector de igual dirección que el dado; el número afecta la longitud y el sentido del vector.



En el plano $\mathbb{R}^2$ los puntos están dados por pares de números reales (sus coordenadas) por lo que, para dar un vector, bastará dar dos pares de números reales que caractericen su origen y su extremo. En la figura que sigue, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ está dado por $P = (1,2)$ y $Q = (5,3)$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{OR}$ está dado por $O = (0,0)$ y $R = (2,1)$.



Algo análogo se puede decir en el espacio de tres dimensiones $\mathbb{R}^3$; ahora, cada punto, en particular el origen y el extremo de un vector, estará dado por una terna de números reales. En la figura que sigue, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ está dado por $P = (2,3,1)$ y $Q = (1,1,4)$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{OR}$ está dado por $O = (0,0,0)$ y $R = (3,0,0)$.



En adelante trabajaremos con vectores cuyo origen O tiene todas sus coordenadas iguales a 0 ($O = (0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ y $O = (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$), identificando entonces el punto P con la flecha $\overrightarrow{OP}$.

Dados $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ en $\mathbb{R}^2$, definimos

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2)$.

Análogamente, en $\mathbb{R}^3$, si $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$, se define

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2, cp_3)$.

Escribimos $P - Q = P + (-1).Q$ (es decir, resta coordenada a coordenada).

En este contexto vale:

a) $\overrightarrow{PQ}$ es *equivalente* a $\overrightarrow{RS}$ si y sólo si $S - R = Q - P$. En particular, $\overrightarrow{PQ}$ es *equivalente* a $\overrightarrow{OR}$ si y sólo si $R = Q - P$.

b) $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son *paralelos* o tienen igual dirección si existe $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tal que $Q - P = k.(S - R)$.
Si $k > 0$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen igual sentido; si $k < 0$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen sentidos opuestos.

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Generalizando lo anterior, llamaremos *punto* o *vector* en el espacio $\mathbb{R}^n$ a una n-upla $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, donde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son números reales. Estos números son las *coordenadas* de X.

Si $P = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$ decimos que

$$P = Q \text{ si y sólo si } p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ p_3 = q_3,\ \ldots,\ p_n = q_n.$$

Definimos

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3, \ldots, p_n + q_n)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2, cp_3, \ldots, cp_n)$.

El vector con todas sus coordenadas cero se notará $O = (0, 0, 0, \ldots, 0)$

Propiedades. Las siguientes propiedades para la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector valen en cualquier espacio de vectores $\mathbb{R}^n$:

1) $P + (Q + R) = (P + Q) + R$

2) $P + Q = Q + P$

3) Si $c \in \mathbb{R}$, $c.(P + Q) = c.P + c.Q$

4) Si $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_2 \in \mathbb{R}$, $(c_1 + c_2).P = c_1.P + c_2.P$ y $(c_1 c_2).P = c_1.(c_2.P)$

5) $O + P = P$

6) $1.P = P$

7) $P + (-1).P = O$ Notación: $-P = (-1).P$

8) $0.A = O$

Producto interno o escalar

Dados dos vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ en $\mathbb{R}^2$, se define el *producto interno (o escalar)* de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como el número real $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$.
En $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, el *producto interno (o escalar)* de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el número real $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$.

Propiedades.

PE1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

PE2. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{w} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$

PE3. Si $k \in \mathbb{R}$, $(k.\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = k.(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (k.\mathbf{w})$

PE4. Si $\mathbf{v} = O$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. Si $\mathbf{v} \neq O$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$.

Diremos que dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son *ortogonales* o *perpendiculares* si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Norma y ángulo

La *norma* de un vector $\mathbf{v}$, que notaremos $\|\mathbf{v}\|$, es la longitud del vector.
Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, su norma es la distancia entre el punto (v_1, v_2) y el origen de coordenadas $O = (0,0)$. Por el teorema de Pitágoras, resulta ser $\|(v_1, v_2)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
De manera análoga, la norma de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$ es $\|(v_1, v_2, v_3)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
La norma puede expresarse en función del producto escalar: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.
A partir de esta definición, se puede calcular la *distancia entre dos puntos* P y Q (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$): es la norma de la diferencia $P - Q$; en símbolos, $d(P, Q) = \|P - Q\|$.

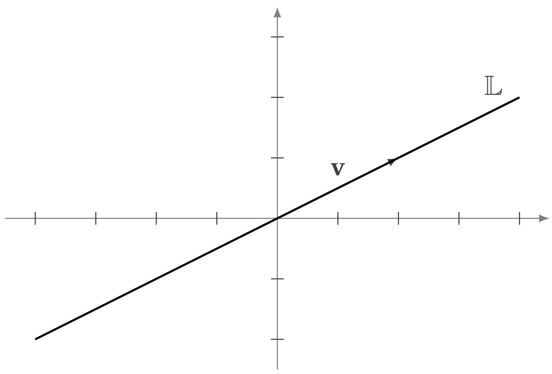
Propiedades. Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son dos vectores, entonces

- $\|k\,\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (*desigualdad triangular o de Minkowski*).
- $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| . \|\mathbf{w}\|$ (*desigualdad de Cauchy-Schwarz*).

El *ángulo* entre dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el menor de los dos ángulos determinados por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Es el único ángulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ que verifica $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| . \|\mathbf{w}\|}$.

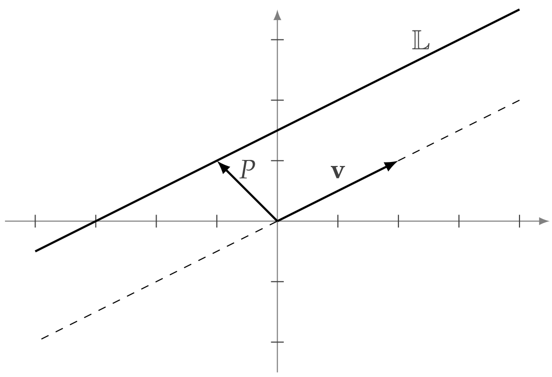
Rectas

Dado en el plano $\mathbb{R}^2$ un vector $\mathbf{v}$, el conjunto de todos sus múltiplos es la recta $\mathbb{L}$ que tiene por dirección a $\mathbf{v}$ y que pasa por O.



Una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ es $X = \lambda.\mathbf{v}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $X = (x, y)$, la ecuación se escribe $(x, y) = \lambda.(v_1, v_2)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
La recta $\mathbb{L}$ resulta ser el conjunto de soluciones de la ecuación $v_2x - v_1y = 0$, y esta ecuación es una *ecuación implícita* de $\mathbb{L}$.

Ahora bien, dados en el plano $\mathbb{R}^2$ un vector $\mathbf{v}$ y un punto P, una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por P en la dirección de $\mathbf{v}$ es $X = \lambda.\mathbf{v} + P$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. El vector $\mathbf{v}$ se dice un *vector dirección* para $\mathbb{L}$.



Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $P = (p_1, p_2)$ y $X = (x, y)$, la ecuación paramétrica se escribe $(x, y) = \lambda.(v_1, v_2) + (p_1, p_2)$.
Si $c = v_2p_1 - v_1p_2$, la recta $\mathbb{L}$ es el conjunto de soluciones de la ecuación $v_2x - v_1y = c$, y esta ecuación es una *ecuación implícita* para $\mathbb{L}$.
Para describir una recta en $\mathbb{R}^2$, podemos utilizar una ecuación paramétrica del tipo $X = \lambda.\mathbf{v} + P$ o utilizar una ecuación implícita del tipo $ax + by = c$.

De manera similar, dados en $\mathbb{R}^3$ un vector $\mathbf{v}$ y un punto P una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por P en la dirección de $\mathbf{v}$ es $X = \lambda.\mathbf{v} + P$ $\quad (\lambda \in \mathbb{R})$. El vector $\mathbf{v}$ se dice un *vector dirección* para $\mathbb{L}$.
Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $X = (x, y, z)$, tenemos que $(x, y, z) = \lambda.(v_1, v_2, v_3) + (p_1, p_2, p_3)$.

Producto vectorial

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, el *producto vectorial* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ se define como el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$. Notar que el producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$ es un vector en $\mathbb{R}^3$.

Propiedades.

PV1. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$

PV2. $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{z})$

$(\mathbf{w} + \mathbf{z}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{z} \times \mathbf{v})$

PV3. Si $k \in \mathbb{R}$, $(k.\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = k.(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (k.\mathbf{w})$

PV4. $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = O$

PV5. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$

Si los puntos O, P y Q en $\mathbb{R}^3$ no están alineados, los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ determinan un paralelogramo. El área de este paralelogramo es la norma del producto vectorial $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$.

Planos en $\mathbb{R}^3$

Dado un vector $\mathbf{N}$ y un punto Q de $\mathbb{R}^3$, la *ecuación* del plano Π que pasa por Q y es perpendicular a $\mathbf{N}$ es

$$\Pi : \quad (X - Q) \cdot \mathbf{N} = 0.$$

El plano Π es el conjunto de todos los puntos X tales que $X - Q$ es perpendicular a $\mathbf{N}$. Diremos que $\mathbf{N}$ es un *vector normal* al plano. Si $X = (x, y, z)$ y $\mathbf{N} = (a, b, c)$, la ecuación resulta:

$$\Pi : \quad ax + by + cz = d \quad \text{donde} \quad d = Q \cdot \mathbf{N}.$$

Esta ecuación es una *ecuación implícita* del plano Π.
Si los puntos P, Q y R no están alineados y pertenecen al plano Π, resulta que Π es el conjunto de todos los X que cumplen

$$X = \alpha.(P - R) + \beta.(Q - R) + R \quad \text{para } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Ésta es una *ecuación paramétrica* del plano Π. Un vector normal $\mathbf{N}$ a Π es cualquier vector no nulo perpendicular simultáneamente a $P - R$ y a $Q - R$. Por ejemplo, puede tomarse $\mathbf{N} = (P - R) \times (Q - R)$.

Una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ puede considerarse como intersección de dos planos que la contienen. Por lo tanto, para dar ecuaciones implícitas para una recta se necesitan por lo menos dos ecuaciones.
Una forma de obtener ecuaciones implícitas a partir de una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}$ del tipo $(x, y, z) = \lambda.(v_1, v_2, v_3) + (p_1, p_2, p_3)$ es buscar dos vectores con distintas direcciones (a, b, c) y (d, e, f) perpendiculares a (v_1, v_2, v_3) simultáneamente. Entonces la recta $\mathbb{L}$ estará dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3 \\ dx + ey + fz = dp_1 + ep_2 + fp_3. \end{cases}$$

Posiciones relativas

Dos rectas en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ se dicen

- *coincidentes* si son la misma recta,
- *transversales* si se cortan en un punto,
- *paralelas* si sus direcciones coinciden.

Dos rectas en $\mathbb{R}^3$ pueden no cortarse ni ser paralelas; en este caso, se dicen *alabeadas*.

Si las direcciones de dos rectas son perpendiculares, decimos que las rectas son *perpendiculares* u *ortogonales*.

Dos planos en $\mathbb{R}^3$ se dicen

- *coincidentes* si son el mismo plano,
- *transversales* si se cortan en una recta,
- *paralelos* si sus vectores normales lo son.

Una recta y un plano en $\mathbb{R}^3$ son

- *paralelos* si la dirección de la recta es perpendicular al vector normal al plano,
- *ortogonales* si la dirección de la recta es paralela al vector normal al plano.