Práctica 2

Matrices y sistemas lineales

Ejercicios

Ejercicio 1. Dadas las siguientes matrices, efectuar, cuando sea posible, los cálculos indicados.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $B + C$ *b*) $2A - E$ *c*) BA *d*) BC

e) CB *f*) AB *g*) ED *h*) AE *i*) EA

Ejercicio 2. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, hallar

a) la segunda fila de AB;

b) la tercera columna de BA;

c) el elemento c_{23} de $C = ABA$.

Ejercicio 3. Dado el sistema lineal

$$\mathcal{S}: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes 4-uplas son soluciones de $\mathcal{S}$?¿Y del sistema homogéneo asociado?

a) $\mathbf{x} = (2, 2, 1, 0)$ *b*) $\mathbf{y} = (1, 1, 1, 4)$ *c*) $\mathbf{z} = (0, 0, 0, 0)$

d) $\mathbf{u} = (-2, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -7)$ *e*) $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ *f*) $\mathbf{w} = (-1, -2, 3, -7)$

Ejercicio 4. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los que $(a, -a, a-1)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 & & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Obtener un sistema equivalente al dado, cuya matriz ampliada sea escalonada en las filas reducida.

a) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resolver por el método de eliminación de Gauss el sistema cuya matriz ampliada es $(A|\mathbf{b})$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (1,2) \\ \mathbf{b} = (0,0) \end{array}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (3,1,-1) \\ \mathbf{b} = (0,0,0) \\ \mathbf{b} = (1,1,2) \end{array}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (5,3,2) \\ \mathbf{b} = (-1,1,2) \\ \mathbf{b} = (0,0,0) \end{array}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (0,0,0) \\ \mathbf{b} = (1,0,0) \\ \mathbf{b} = (0,1,0) \end{array}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (1,2,1,2) \\ \mathbf{b} = (2,0,-1,2) \\ \mathbf{b} = (0,0,0,0) \end{array}$

Ejercicio 7. Determinar todas las matrices B que verifican

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles y exhibir la inversa cuando exista.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad G + H; \quad G \cdot H.$$

Ejercicio 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Decidir si A^{-1} es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10. Sean

$$\mathcal{S}_1 = \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{-x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

y

$$\mathcal{S}_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Encontrar todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ que son soluciones de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ simultáneamente.

Ejercicio 11. Determinar si el sistema tiene soluciones no triviales, sin resolverlo

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 12.

a) Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ tiene solución única.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (k^2-1)x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ (k-1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_3 = 0 \end{cases}$$

b) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ admite solución no trivial.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (k+1)x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + (k+2)x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 13. Determinar todos los valores de a, b y c para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ es compatible.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

Ejercicio 14. Resolver el sistema para todos los valores de k.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + 2x_3 - x_4 = k+2 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3kx_2 + 2x_3 - 2x_4 = k \end{cases}$$

Ejercicio 15. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales los sistemas cuyas matrices ampliadas se dan a continuación son compatibles. En cada caso, para los valores hallados, determinar si el sistema es compatible determinado o indeterminado.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & b \\ 0 & a+1 & a^2-1 & b+2 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & -a-1 & b \end{array}\right)$

Ejercicio 16. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales $(2, 0, -1)$ es la única solución del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - bx_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 17. Hallar todos los valores de k para los cuales el conjunto de soluciones del siguiente sistema es $M = \{\lambda(1, 1, 0, 0) + (2, 0, -1, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k^2-1)x_2 + 2x_4 = -k^2+1 \\ (k+1)x_3 + 4x_4 = -k-1 \end{cases}$$

Ejercicio 18. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$ tiene como conjunto de soluciones una recta.