1. Sea f la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos (-3, -2) y (-1, 4). Sea $g: R \to R$ la función dada por $g(x) = x^2 + 5x + 4$.

a. Hallar la fórmula correspondiente a la función f.
b. Hallar, analítica y gráficamente, los puntos de intersección entre los gráficos de las funciones f y g.

2. Dadas las funciones: $f: A \subseteq R \to R / \ f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 1}$ y $g: B \subseteq R \to R / \ g(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3x^2 + 7x + 2}$

a. Indicar el conjunto B, dominio de la función g, y hallar una expresión simplificada para dicha función.
b. Hallar las funciones derivadas de f y g.
c. Resolver la ecuación $f'(x) = 5$.

3. Un productor de zapatos estima que el costo de producir q pares de zapatos, en pesos, está dado por la expresión C(q) = 60q + 5000 mientas que su ingreso, cuando se producen y venden q unidades es I(q) = $10q^2$ + 20q + 5000

a. ¿Cuántas unidades debe vender como mínimo para no tener pérdidas?
b. Si desea incrementar la producción de 10 a 12 pares de zapatos, ¿cuál es el beneficio promedio del productor? Interpretar el resultado en términos del problema.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Hallar a, b, c, donde a = det(A), b = det(B) y c = det(A^{-1}).
b. Indicar si la terna (a, b, c) es solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - y + 6z = 7 \\ 3y - 2z = -1 \\ -x + y - 4z = -4 \end{cases}$$

<u>Resolución.</u>

<u>Ejercicio 1.</u> Sea f la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos (-3, -2) y (-1, 4). Sea $g: R \to R$ la función dada por $g(x) = x^2 + 5x + 4$.

a. Hallar la fórmula correspondiente a la función f.

Hallamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-(-3)} = 3$$

Ahora reemplazando el valor de la pendiente y un punto en la ecuación de la recta, encontramos el punto de corte con el eje y.

$y=mx+b$
$4=(3)(-1)+b$
$7=b$
Con lo cual la función f queda determinada por la ecuación

$$f(x)=3x+7$$

b. Hallar, analítica y gráficamente, los puntos de intersección entre los gráficos de las funciones f y g.

Para encontrar analíticamente los puntos de intersección, igualamos las funciones.
$3x+7=x^2+5x+4$
$0=x^2+5x-3x+4-7$
$0=x^2+2x-3$
$0=(x+3)(x-1)$
Para que el producto de dos números sea igual a cero, alguno de los factores debe ser cero, por lo tanto
$x+3=0 \quad \vee \quad x-1=0$
$x_1=-3 \quad \vee \quad x_2=1$
Ahora estos valores los reemplazamos en las funciones y verificamos que sus imágenes sean iguales.

$f(-3)=3(-3)+7$ $\qquad$ $g(-3)=(-3)^2+5(-3)+4$
$f(-3)=-2$ $\qquad$ $g(-3)=-2$

El punto (-3,-2) es un punto de intersección.

$f(1)=3(1)+7$ $\qquad$ $g(1)=(1)^2+5(1)+4$
$f(1)=10$ $\qquad$ $g(1)=10$

El punto (1,10) es un punto de intersección.

Ejercicio 2. Dadas las funciones: $f: A \subseteq R \to R \,/\, f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-1}$ y $g: B \subseteq R \to R \,/\, g(x)=\dfrac{9x^2-1}{3x^2+7x+2}$

a. Indicar el conjunto B, dominio de la función g, y hallar una expresión simplificada para dicha función.

Para encontrar el dominio de la función g, analizamos las restricciones, en este caso, serían aquellos valores de x para los cuales el denominador es cero.

$3x^2+7x+2=0$

Aplicamos la resolvente $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4(3)(2)}}{6}$$

$$x=\frac{-7\pm5}{6}$$

$x_1=\dfrac{-1}{3}$ $\qquad$ $x_2=-2$

Excluimos del dominio estos valores de x

Dom g=R-$\left\{-2,\frac{-1}{3}\right\}$

Ahora, para simplificar la función g, factoreamos numerador y denominador teniendo en cuenta el dominio de definición de la función.

$g(x)=\frac{9x^2-1}{3x^2+7x+2}$

Aplicando diferencia de cuadrados en el numerador y escribiendo la expresión cuadrática en su forma factorizada, obtenemos

$g(x)=\frac{(3x-1)(3x+1)}{(3x+1)(x+2)}$

$g(x)=\frac{3x-1}{(x+2)}$

$g:R-\left\{-2,\frac{-1}{3}\right\}\rightarrow R\,/\;g(x)=\frac{3x-1}{(x+2)}$

b. Hallar las funciones derivadas de f y g.

$f(x)=\frac{x^2-3}{x-1}$

Para derivar la función utilizamos la derivada de un cociente

$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2-3)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$

$g(x)=\frac{9x^2-1}{3x^2+7x+2}$

Del ejercicio anterior sabemos que sujetos al dominio, podemos reescribir la función g como una función más sencilla

$g(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ para $x\neq-2$ y $x\neq\frac{-1}{3}$

$g'(x)=\frac{3(x+2)-(3x-1)}{(x+2)^2}$

$g'(x)=\frac{7}{(x+2)^2}$

c. Resolver la ecuación f’(x)=5

Igualando f’(x) obtenida en el punto a). y luego igualando a 5, obtenemos

$$5=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$$

$5(x-1)^2=x^2-2x+3$
$5(x^2-2x+1)-x^2+2x-3=0$
$5x^2-10x+5-x^2+2x-3=0$
$4x^2-8x+2=0$
$2(2x^2-4x+1)=0$
$2x^2-4x+1=0$

Aplicando ahora la resolvente, encontramos los valores de x que satisfacen la ecuación

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}$$
$$x_2=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reemplazamos los valores obtenidos de x en la derivada y verificamos que en esos puntos la derivada es igual a 5.

$$f'\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3}{\left(\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1\right)^2}=5$$

$$f'\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3}{\left(\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1\right)^2}=5$$

Ejercicio 3: Un productor de zapatos estima que el costo de producir q pares de zapatos, en pesos, está dado por la expresión $C(q) = 60q + 5000$ mientas que su ingreso, cuando se producen y venden q unidades es $I(q) = 10q^2 + 20q + 5000$

a. ¿Cuántas unidades debe vender como mínimo para no tener pérdidas?

Para que el productor no tenga pérdidas su beneficio debe ser mínimo cero. Encontremos la función que representa el beneficio utilizando la expresión,
$B(q)=I(q)-C(q)$

$B(q)=10q^2+20q+5000-(60q+5000)$
$B(q)=10q^2-40q$
$0=10q^2-40q$
$0=10q(q-4)$
Para que un producto sea igual a cero, alguno de los dos factores debe ser igual a cero, por lo tanto tenemos dos igualdades:

$10q=0$ o $q-4=0$
$q=0$ o $q=4$

Sabiendo que esta ecuación representa una parábola con concavidad positiva, y en q=0 y q=4, tenemos dos raíces; a partir de q=4 la función beneficio toma valores positivos, por lo tanto no tendría perdidas. El mínimo de unidades que debe producir el productor es q=4.

b. Si desea incrementar la producción de 10 a 12 pares de zapatos, ¿cuál es el beneficio promedio del productor? Interpretar el resultado en términos del problema.

El beneficio promedio viene dado por la expresión

$$\frac{\Delta B}{\Delta q}=\frac{B(q+\Delta q)-B(q)}{\Delta q}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta q}=\frac{B(12)-B(10)}{12-10}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta q}=\frac{\left(10(12)^2-40(12)\right)-\left(10(10)^2-40(10)\right)}{2}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta q}=\frac{\left(10(12)^2-40(12)\right)-\left(10(10)^2-40(10)\right)}{2}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta q}=\frac{960-600}{2}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta q}=180$$

En promedio, el productor gana 180 pesos por cada par de zapatos extra cuando aumenta la producción de 10 a 12 pares de zapatos.

Ejercicio 4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a. Hallar a, b, c, donde a = det(A), b = det(B) y c = det(A^{-1}).

Recordemos: Sea M una matriz 2x2 como sigue

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Su determinante viene dado por la fórmula

$$\det(M) = a*d-b*c$$

Por lo tanto,
a=det(A)= (3*4)-(5*2)= 2

Utilizando la regla de Sarrus, calculamos det(B)

$$b=\det(B)=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\end{array} = 1.1.1+0.0.(-1)+(-1).0.0-(-1).1.(-1)-0.0.1-1.0.0=0$$

<u>Observación.</u> Otra manera de encontrar el determinante de B es notar que la fila 3 de la matriz B, es múltiplo de la fila 1. Por propiedades su determinante es cero.
También es posible calcularlo utilizando la regla de Laplace.

Ahora recordemos que si A es una matriz inversible, $\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}$

$$c=\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}=\frac{1}{2}$$

Resumiendo, a=2, b=0, c=1/2.

b. Indicar si la terna (a, b, c) es solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x-y+6z=7 \\ 3y-2z=-1 \\ -x+y-4z=-4 \end{cases}$$

Para que la terna (a,b,c) sea solución del sistema, debe ser solución de cada ecuación simultáneamente, esto es
(a,b,c)=(2, 0, 1/2)

$$\begin{cases} 2(2)-(0)+6\left(\frac{1}{2}\right)=7 \\ 3(0)-2\left(\frac{1}{2}\right)=-1 \\ -(2)+(0)-4\left(\frac{1}{2}\right)=-4 \end{cases}$$

Por lo tanto comprobamos que la terna (2, 0, 1/2) es solución del sistema.