UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL - FACULTAD REGIONAL AVELLANEDA
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA
Examen Final del 7 de Agosto de 2019

Tema F-08-19
Apellido y nombres del/la estudiante: ....
Especialidad: ....

1.a	1.b	2.a	2.b	3.a	3.b	4.a	4.b	Calificación

***NOTA**: La condición para aprobar el Examen Final es tener <u>bien</u> cinco de las ocho actividades a resolver, debiendo haber al menos una de cada uno de los ítems designados del 1 al 4. Presente en las hojas que entrega el desarrollo completo de todos los ítems, para justificar sus respuestas. <u>No haga el examen con lápiz</u>.*

BLOQUE TEMÁTICO 1: ÁLGEBRA VECTORIAL – ÁLGEBRA MATRICIAL

1.a) Considere el siguiente conjunto de vectores de R^3: $V = \{(0;1;1),(1;a,0),(1;2;a^2)\}$ Deduzca si es posible encontrar valores reales de a para que dicho conjunto sea linealmente dependiente.
Adopte $a = -1$ y obtenga al vector $\vec{w} = (5;-5;2)$ como combinación lineal de los vectores de V. ¿Es V una base de R^3? ¿Por qué?

1.b) Construya tres matrices A simétricas $(A = A^t)$, una de rango 1, otra de rango 2 y una tercera de rango 3. Justifique la decisión adoptada en cada caso. Determine el valor del determinante de cada una. ¿Alguna de las matrices que propone admite inversa? ¿Cuál o cuáles? ¿Por qué?

BLOQUE TEMÁTICO 2: GEOMETRÍA ANALÍTICA

2.a) Considere las rectas R: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{a}$ y $S = \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x + y - z = 2 \end{cases}$ Obtenga el valor de la componente a del vector director de R para que ambas rectas sean coplanares, y determine las coordenadas del punto de intersección entre ellas.

2.b) Encuentre una ecuación de una recta que pasa por el centro de la cónica de ecuación $4x^2 + y^2 - 8x - 12 = 0$ y que forme un triángulo de 2 unidades de área con los ejes coordenados. Realice la figura de análisis, con una representación gráfica aproximada de los elementos geométricos involucrados, y explique si la solución obtenida es única.

BLOQUE TEMÁTICO 3: ÁLGEBRA LINEAL

3.a) Construya una transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ cuyo Núcleo sea el subespacio
$W = \{(x;y;z) \in R^3 / \ x + z = 0 \ \wedge \ x - y = 0\}$. Determine, justificando, la dimensión de la Imagen.

3.b) Obtenga el complemento ortogonal del subespacio W del ejercicio anterior, interprete geométricamente el resultado y determine una base cuyos elementos sean versores, y la dimensión del mismo.

MISCELÁNEAS

4.a) Escriba la ecuación de un hiperboloide de una hoja cuyo eje de simetría sea el eje de ordenadas. Intercéptelo con el plano $z = 2$. ¿Qué tipo de cónica obtiene? ¿Cuál su centro? Realice una representación gráfica aproximada. ¿Puede definir un hiperboloide de una hoja que cumpla la condición anterior que al cortarlo con z =2 resulte un par de rectas? Proponga una ecuación.

4.b) La matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas es $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & p \\ 3 & 6 & q \end{array}\right)$. Proponga, si es posible, valores reales de los parámetros p y q para que el sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. Justifique en todos los casos la elección hecha.

Resolución

1.a) Considere el siguiente conjunto de vectores de R^3: $V = \{(0;1;1),(1;a,0),(1;2;a^2)\}$ Deduzca si es posible encontrar valores reales de a para que dicho conjunto sea linealmente dependiente.
Adopte $a = -1$ y obtenga al vector $\vec{w} = (5;-5;2)$ como combinación lineal de los vectores de V. ¿Es V una base de R^3? ¿Por qué?

1º) Si el conjunto V dado es L.D. debe cumplirse:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(a^2-2)+(-a)=0 \Rightarrow -a^2-a+2=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow (a+2)(a-1)=0 \Rightarrow \boxed{a=\{-2;1\}}$ para que V sea L.D.

2º) Planteamos la combinación lineal:

$a\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Mathematics de Microsoft mediante obtenemos:

$$solve(\{b+c=5, a-b+2c=-5, a+c=2\}) \Rightarrow (a=3;\ b=6;\ c=-1)$$

3º) Con $a=-1/\,a\neq-2 \wedge a\neq 1 \Rightarrow$ V es un conjunto formado por tres vectores L.I. en $\mathbb{R}^3$, por tanto forman una base del mismo.

1.b) Construya tres matrices A simétricas ($A = A^t$), una de rango 1, otra de rango 2 y una tercera de rango 3. Justifique la decisión adoptada en cada caso. Determine el valor del determinante de cada una. ¿Alguna de las matrices que propone admite inversa? ¿Cuál o cuáles? ¿Por qué?

1º) Una matriz es simétrica si cumple: $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \wedge \mathbb{A} = \mathbb{A}^T$

2º) Simétrica de rango 1; elegimos $\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{2\times 2}/\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ cumple $\mathbb{M} = \mathbb{M}^T$ y $\det(\mathbb{M}) = 0 \Rightarrow rg(\mathbb{M}) = 1$

3º) Simétrica de rango 2; elegimos $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{2\times 2}/\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ cumple $\mathbb{P} = \mathbb{P}^T$ y $\det(\mathbb{P}) = 1 \Rightarrow rg(\mathbb{P}) = 2$

4º) Simétrica de rango 3; elegimos $\mathbb{S} \in \mathbb{R}^{3\times 3}/\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $\mathbb{S} = \mathbb{S}^T$ y

$\det(\mathbb{S}) = 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow rg(\mathbb{S}) = 3$

Toda matriz cuadrada cuyo determinante sea distinto de cero, admite inversa. En este caso $\mathbb{P}$ y $\mathbb{S}$.

2.a) Considere las rectas R: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{a}$ y $S=\begin{cases}2x+y+z=0\\-x+y-z=2\end{cases}$ Obtenga el valor de la componente a del vector director de R para que ambas rectas sean coplanares, y determine las coordenadas del punto de intersección entre ellas.

1º) determinamos la ecuación de S a partir de los dos planos dados:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&\boxed{1}&0\\-1&1&-1&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&0\\\boxed{1}&2&0&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&-3&1&-4\\1&2&0&2\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-3y+z=-4\\x+2y=2\end{array}\right\}(x;y;z)=(-2y+2;y;3y-4)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S:\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3/(x;y;z)=(2;0;-4)+\lambda\cdot(-2;1;3)\}$$

2º) Si las rectas son coplanares no pueden ser alabeadas; entonces, según la expresión de la mínima distancia entre rectas alabeadas: $d_{mín.}=\frac{\left|\overrightarrow{P_RP_S}\bullet\left(\overrightarrow{d_R}\times\overrightarrow{d_S}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{d_R}\times\overrightarrow{d_S}\right\|}$ debe cumplirse que dicha distancia sea nula, para lo cual:

$\overrightarrow{P_RP_S}\bullet\left(\overrightarrow{d_R}\times\overrightarrow{d_S}\right)=0$ **[1]**

3º) Los puntos de ambas rectas son: $P_R(1;2;2)\wedge P_S=(2;0;-4)\Rightarrow\overrightarrow{P_RP_S}=(1;-2;-6)$

4º) Hallamos el vector $\overrightarrow{d_R}\times\overrightarrow{d_S}=(3;-1;a)\times(-2;1;3)\Rightarrow$ Mathematics mediante:

$$cross(\{3,-1,a\},\{-2,1,3\})=(-a-3;-2a-9;1)$$

5º) Según **[1]:** R y S serán coplanares si y solo si:

$$(1;-2;-6)\bullet(-a-3;-2a-9;1)=0\Rightarrow-a-3+4a+18-6=0\Rightarrow3a=-9\Rightarrow\boxed{a=-3}$$

6º) Pasando ambas rectas a forma paramétrica cartesiana:

$R:\left\{\begin{array}{l}x=3\mu+1\\y=-\mu+2\\z=-3\mu+2\end{array}\right\}\wedge S:\left\{\begin{array}{l}x=2-2\lambda\\y=\lambda\\z=-4+3\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow$ Mathematics mediante, resolvemos el sistema:

$R:\left\{\begin{array}{l}3\mu+1=2-2\lambda\\-\mu+2=\lambda\\-3\mu+2=-4+3\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow$ Mathematics resuelve en este caso, sistemas de 2 ecuaciones con dos incógnitas:

I) resolvemos primera y segunda: $solve(\{3\mu+1=2-2\lambda,-\mu+2=\lambda\})\quad(\mu=-3,\lambda=5)$

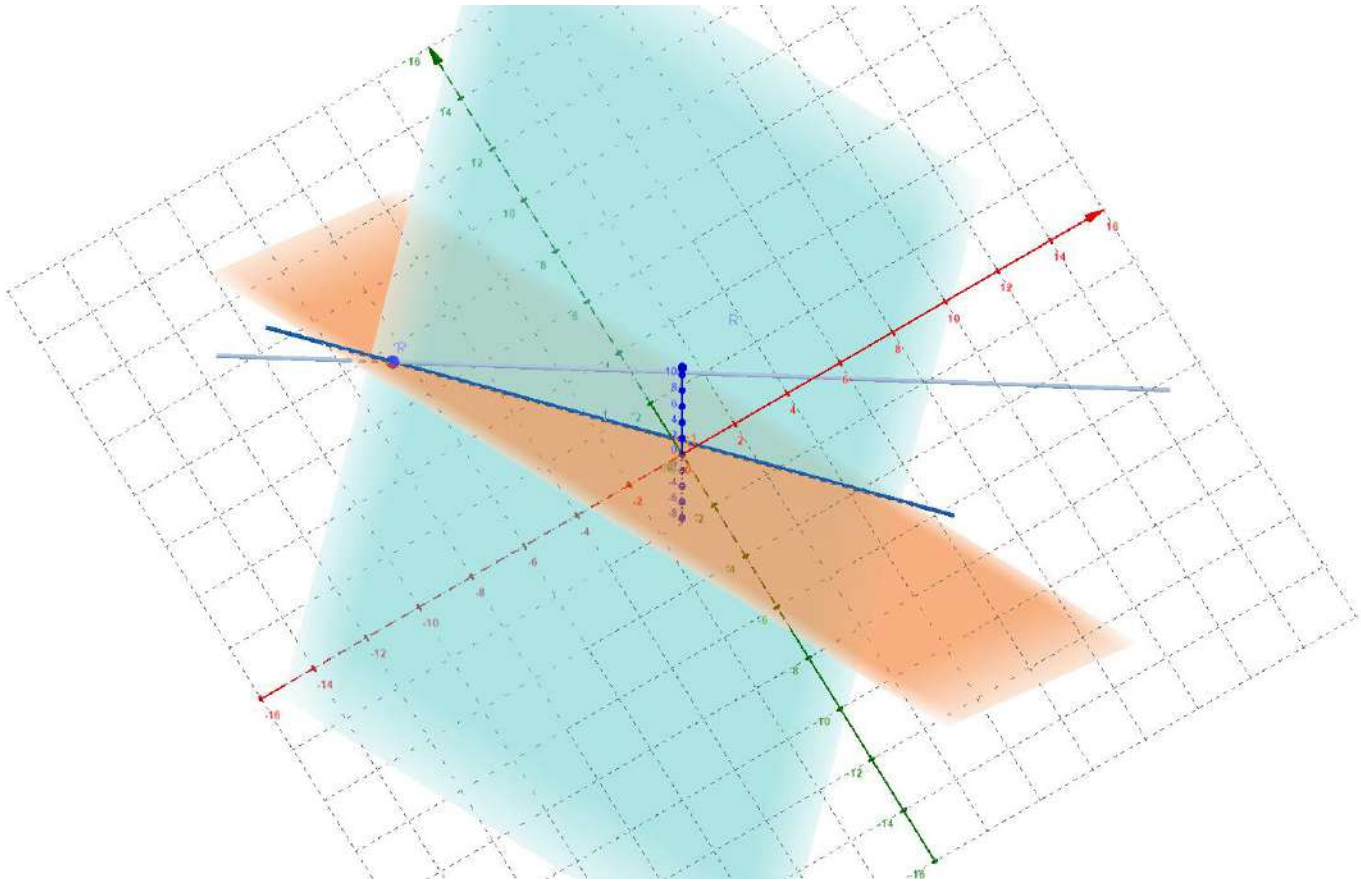
II)resolvemos primera y tercera: $solve(\{3\mu+1=2-2\lambda,(-3)\mu+2=-4+3\lambda\})\quad(\mu=-3,\lambda=5)$

III) finalmente segunda y tercera: $solve(\{-\mu+2=\lambda,(-3)\mu+2=-4+3\lambda\})\quad(\mu=2-\lambda,\lambda\in\mathbb{R})$

Con $\mu=-3\wedge\lambda=5$ hallamos las coordenadas del punto de intersección:

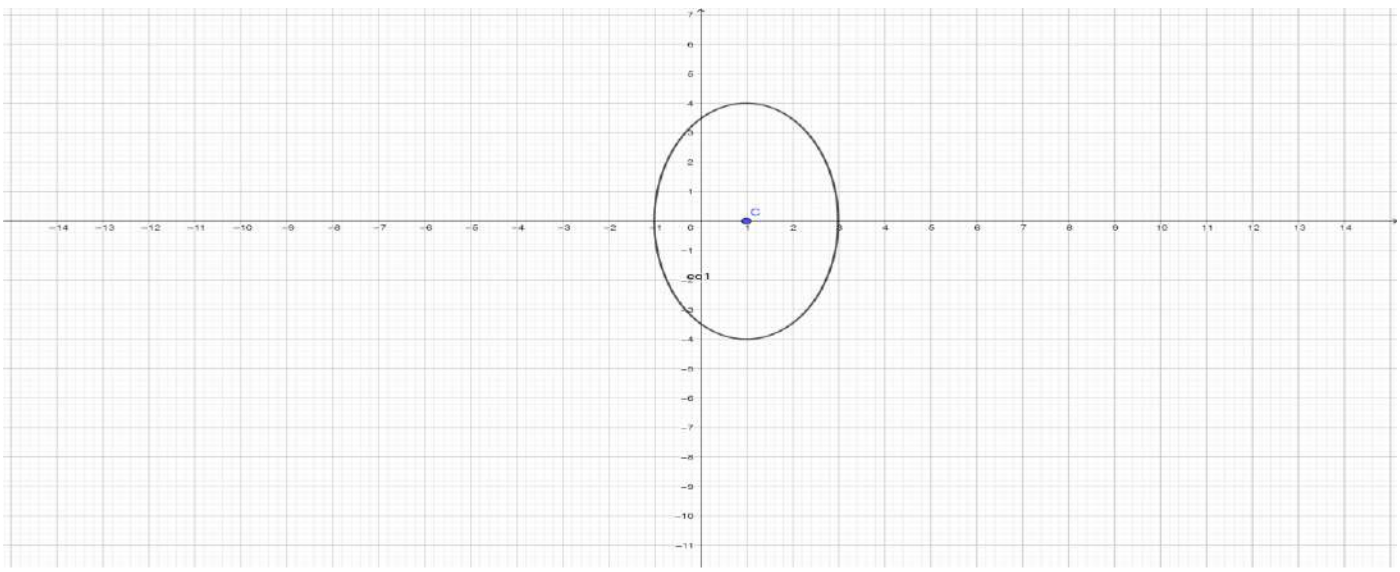
$$\boxed{P=R\cap S=(-8;5;11)}$$

Graficando las dos rectas, los dos planos y el punto de intersección, GeoGebra presenta:



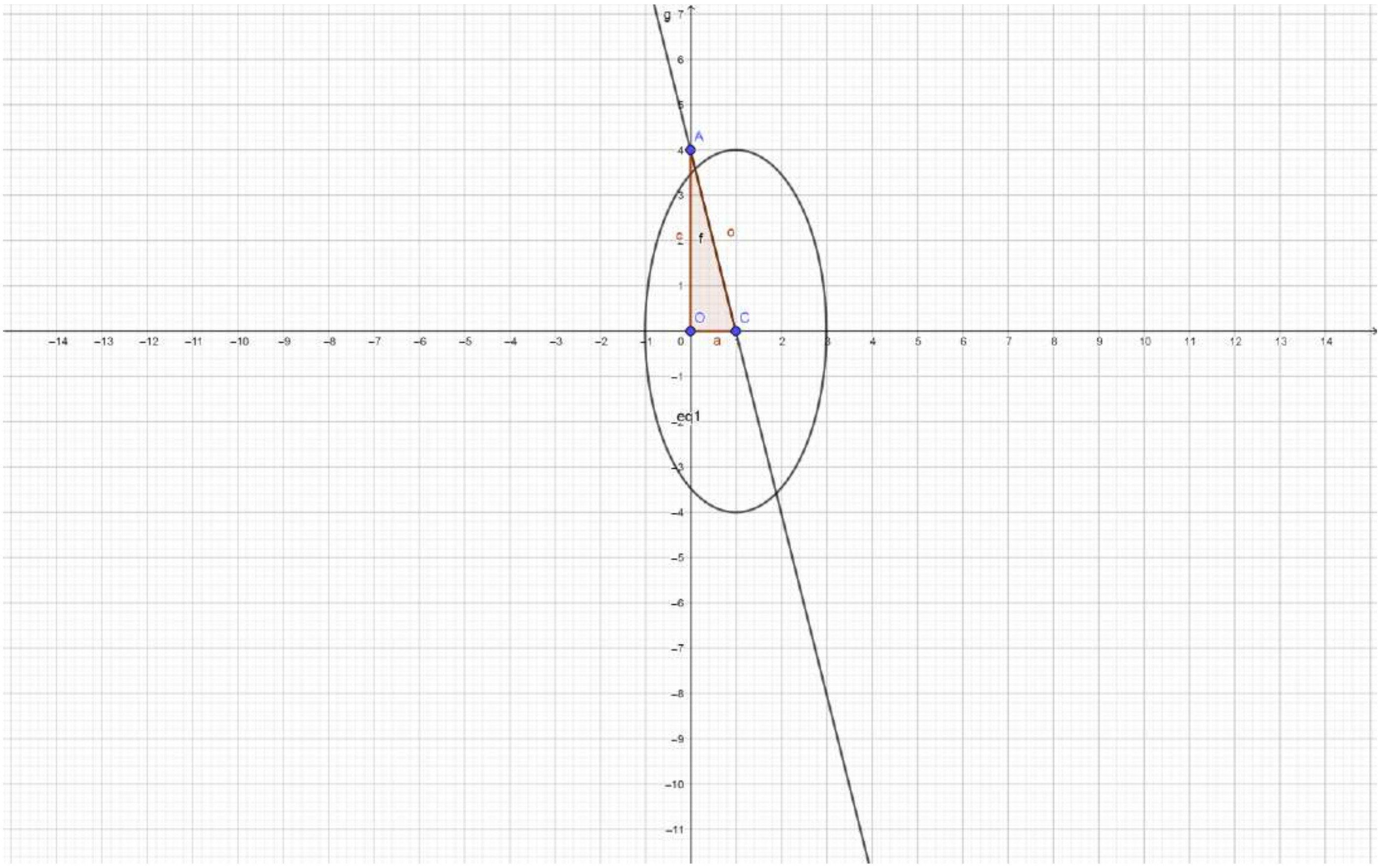
2.b) Encuentre una ecuación de una recta que pasa por el centro de la cónica $4x^2 + y^2 - 8x - 12 = 0$ y que forme un triángulo de 2 unidades de área con los ejes coordenados. Realice la figura de análisis, con una representación gráfica aproximada de los elementos geométricos involucrados, y explique si la solución obtenida es única.

1º) Factorizamos la cónica: $4\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) + y^2 = 12 \Rightarrow 4\left(x-1\right)^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \boxed{\frac{\left(x-1\right)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1}$ elipse de centro $C\left(1;0\right)$; graficamos en GeoGebra:



2º) Para que el triángulo tenga 2 unidades de área, basta que la recta pase, por ejemplo por P(0;4), puesto que en ese caso la base del triángulo rectángulo formado COA, tiene longitud 1 y la altura longitud 4 con lo cual aplicando:

$Área(\triangle AOC) = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OA}}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2} \Rightarrow \boxed{Área(\triangle AOC) = 2}$. La solución no es única. Otro triángulo de igual área se forma con los puntos O, C y $B(-4;0)$.



3º) A partir de C(1;0) y A(0;4) hallamos una ecuación de la recta pedida:

$$\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-1}{0-1} \Rightarrow -y = 4(x-1) \Rightarrow \boxed{r: 4x + y - 4 = 0}$$

3.a) Construya una transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ cuyo Núcleo sea el subespacio $W = \{(x;y;z) \in R^3 / \ x + z = 0 \ \wedge \ x - y = 0\}$. Determine, justificando, la dimensión de la Imagen.

1º) Resolvemos $\begin{cases} x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x;y;z) = (x;x;-x) \Rightarrow \boxed{W: \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / (x;y;z) = \lambda \cdot (1;1;-1)\}}$

2º) Se cumple entonces que: $T(1;1;-1) = (0;0;0)$

Inventamos dos componentes mas del dominio de la T.L. y sus correspondientes imágenes, lo mas simple posible,

por ejemplo: $T(1;0;0) = (0;1;0) \wedge T(0;1;0) = (1;0;0)$ tal que $\{(1;1;-1),(1;0;0),(0;1;0)\}$ forman una base del dominio de la T.L. lo cual puede comprobarse por ejemplo, calculando el determinante de la matriz que forman como vectores columnas. Entonces:

$$a\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{cases}a+c=x\\b+c=y\\-c=z\Rightarrow\boxed{c=-z}\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}a-z=x\Rightarrow\boxed{a=x+z}\\b-z=y\Rightarrow\boxed{b=y+z}\end{cases}\right\}\Rightarrow$$

Planteamos:

$$(x+z)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(y+z)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-z\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow(x+z)\cdot T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(y+z)\cdot T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-z\cdot T\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(x+z)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+(y+z)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-z\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\x+z\\0\end{pmatrix}}$$ Verificamos que:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0\\1+0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0\\0+0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad T\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1\\1-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ ¡ Comprobado!

3º) Planteamos:

$$Dim\left[Nu(T)\right]+Dim\left[\operatorname{Im}(T)\right]=Dim\left[Dom(T)\right]\Rightarrow 1+Dim\left[\operatorname{Im}(T)\right]=3\Rightarrow\boxed{Dim\left[\operatorname{Im}(T)\right]=2}$$

3.b) Obtenga el complemento ortogonal del subespacio W del ejercicio anterior, interprete geométricamente el resultado y determine una base cuyos elementos sean versores, y la dimensión del mismo.

1º) Siendo $W:\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3/(x;y;z)=\lambda\cdot(1;1;-1)\right\}\Rightarrow\boxed{W^{\perp}=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3/x+y-z=0\right\}}$

Utilizamos el director de la recta dada (SEV W) como vector normal del plano complemento ortogonal de la recta.

2º) Determinamos una base de dicho SEV:

$$x+y-z=0\Rightarrow z=x+y\Rightarrow(x;y;z)=(x;y;x+y)=x\cdot(1;0;1)+y\cdot(0;1;1)$$

3º) Nos piden una base de versores, entonces $\boxed{Base\left(W^{\perp}\right)=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}}$ y $\boxed{\dim\left(W^{\perp}\right)=2}$

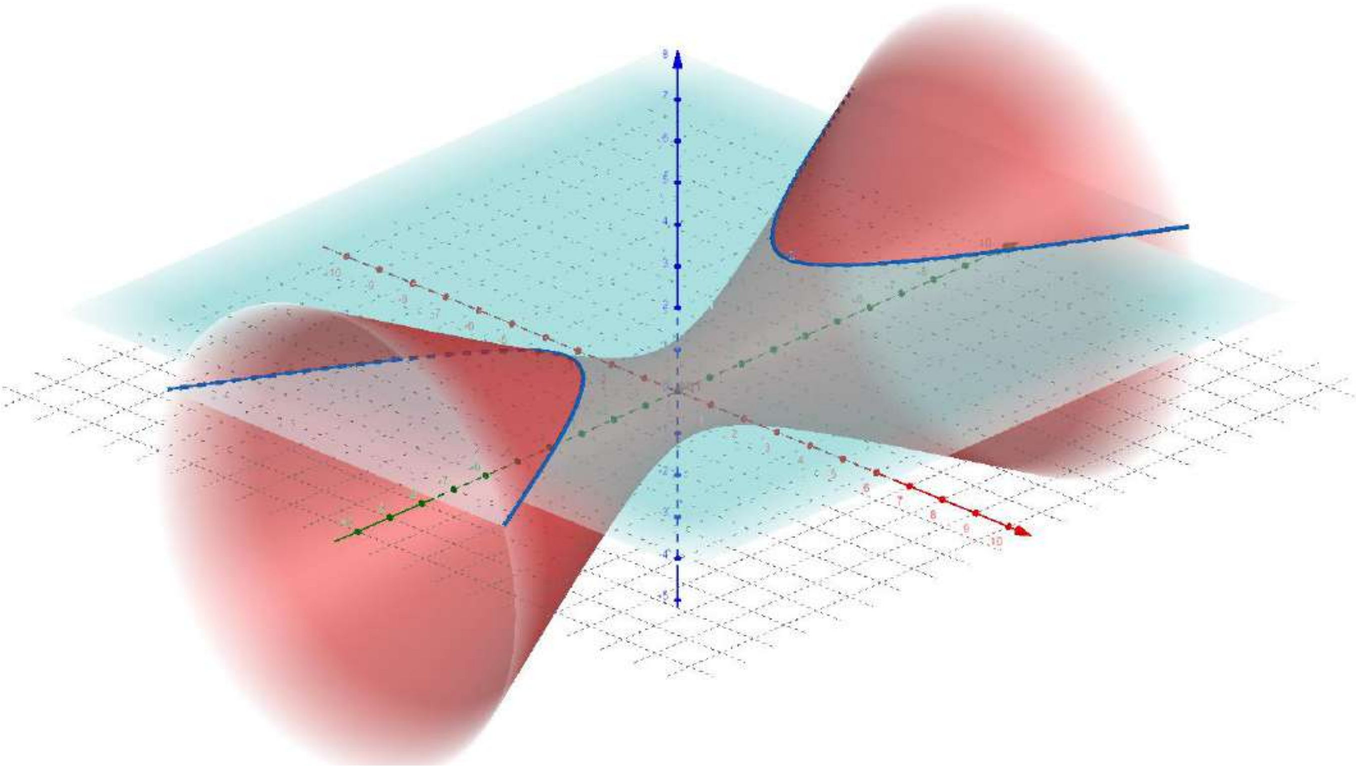
4.a) Escriba la ecuación de un hiperboloide de una hoja cuyo eje de simetría sea el eje de ordenadas. Intercéptelo con el plano $z=2$. ¿Qué tipo de cónica obtiene? ¿Cuál su centro? Realice una representación gráfica aproximada. ¿Puede definir un hiperboloide de una hoja que cumpla la condición anterior que al cortarlo con z =2 resulte un par de rectas? Proponga una ecuación.

1º) La ecuación de un hiperboloide de una hoja tiene la forma: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$; en esta expresión, el eje de simetría es el de cotas, puesto que el término en z es el que tiene signo negativo.

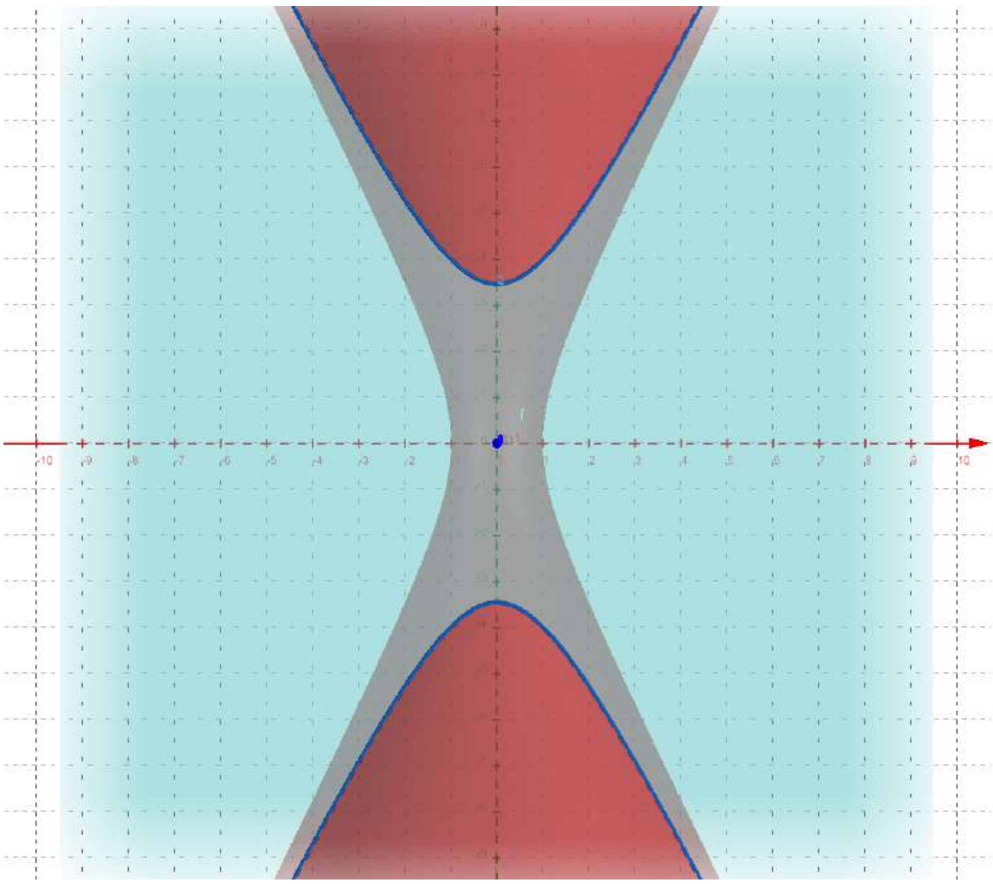
2º) Escribimos la ecuación mas sencilla posible: $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$ y lo interceptamos con el plano ; obtenemos:

$$x^2-\frac{y^2}{4}+2^2=1\Rightarrow x^2-\frac{y^2}{4}=-3\Rightarrow\boxed{-\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1}$$

Obtenemos una hipérbola cuyo centro, en el espacio tridimensional es el punto C(0;0;2). Graficamos con GeoGebra:



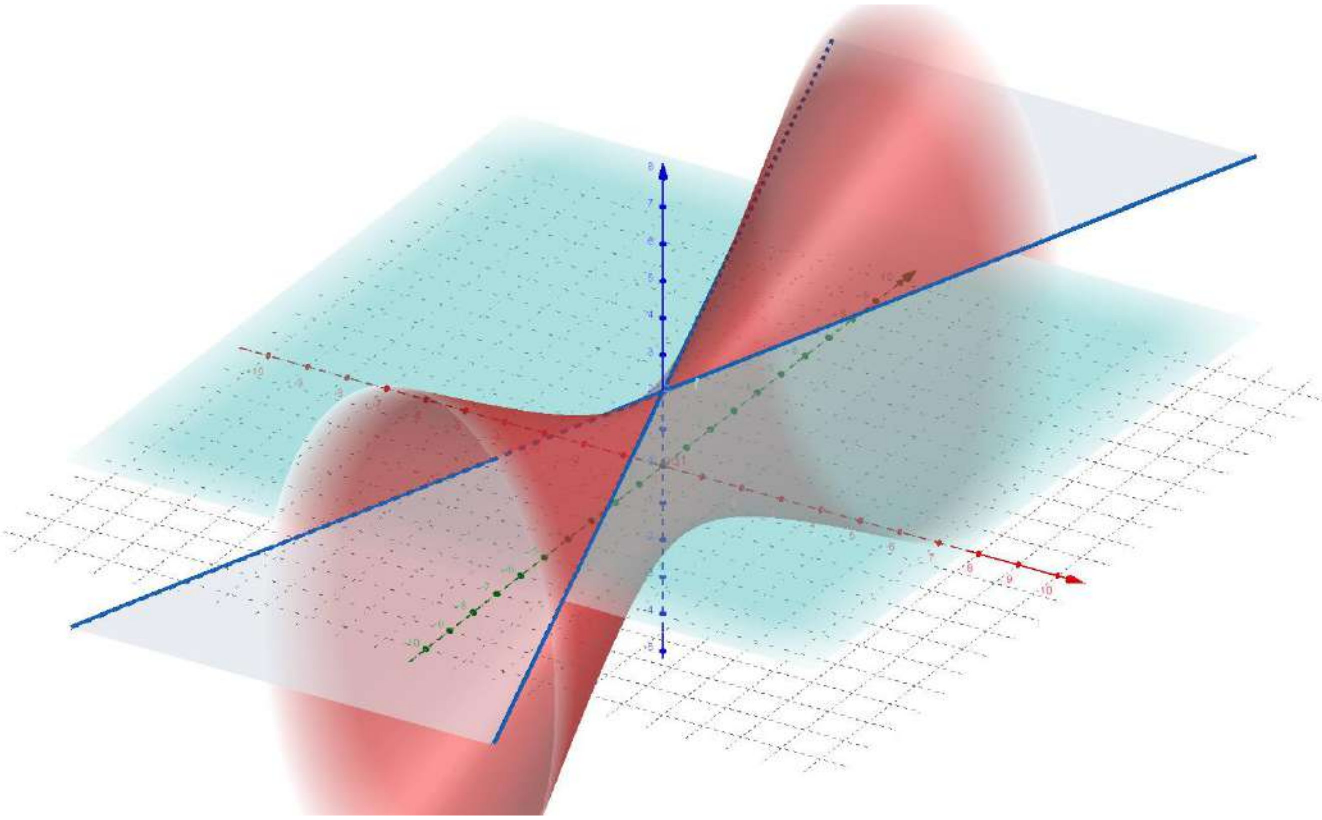
En vista frontal:



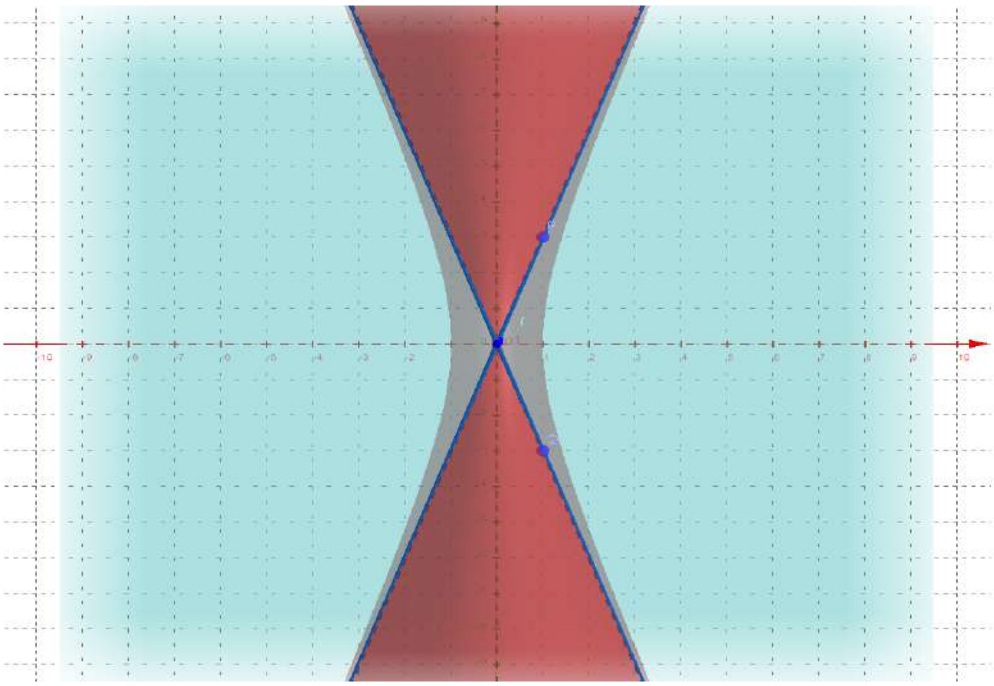
3º) A partir de: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$ planteamos por ejemplo: $x^2-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1\Rightarrow$

al interceptar este hiperboloide de una hoja con el plano $z=2$ obtenemos:

$x^2-\frac{y^2}{9}+\frac{2^2}{4}=1\Rightarrow x^2-\frac{y^2}{9}+1=1\Rightarrow x^2-\frac{y^2}{9}=0\Rightarrow\left(x-\frac{1}{3}y\right)\left(x+\frac{1}{3}y\right)=0$ Así ambas rectas en dicho plano, son: $\boxed{y=-3x}\wedge\boxed{y=3x}$. Graficadas en GeoGebra:



Y en vista frontal, sobre el plano , aparecen ambas rectas: $y=3x$ que pasa por $P(1;3;2)$ e $y=-3x$ por $Q(1;-3;2)$



4.b) La matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas es $\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \boldsymbol{p} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \boldsymbol{q} \end{array}\right)$. Proponga, si es posible, valores reales de los parámetros $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ para que el sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. Justifique en todos los casos la elección hecha.

1º) Triangulamos: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & p \\ 3 & 6 & q \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & -p \\ 3 & 6 & q \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1+2p \\ 1 & 2 & -p \\ 0 & 0 & q+3p \end{array}\right) \Rightarrow$ a partir de aquí analizamos según Roché-Frobenius.

2º) No se cumple para ningún valor real de p y q que $rg(A) = rg(A') = n = 2 \Rightarrow \nexists p \in \mathbb{R} \wedge \nexists q \in \mathbb{R}$

tal que el sistema dado sea compatible determinado.

3º) Si $1+2p=0 \wedge q+3p=0$ se cumple que $rg(A) = rg(A') = 1 < 2 = n$.

El sistema será compatible indeterminado, si y solo si: $p = -\frac{1}{2} \wedge q = \frac{3}{2}$

4º) El sistema será incompatible $\forall p \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \vee q \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ en cuyo caso se cumple:

$rg(A) = 1 < 3 = rg(A')$