**ANALISIS 2-(Ingenieria en sonido y computacion)-Examen Final-(16-12-2016)**

Nombre..........................................................................................................Comision...............................

**Problema 1**. Analizar si la función $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por la expresión que aparece en (1) resulta diferenciable en $\mathbf{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

..........................................................................................................

**Problema 2** Sea $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ una función diferenciable en $P = (1,1)$ tal que $g(1,1) = (2,2)$ y ademàs

$$g'(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado se tiene la funciòn $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definida como $f(x,y) = xy + \sqrt[3]{xy}$,

a) Analizar si $f(x,y)$ es sobreyectiva.

b) Calcular el plano tangente a $h(x,y) = (f \circ g)(x,y)$ en el punto $P = (1,1)$.

..........................................................................................................

**Problema 3** Dada la siguiente curva parametrica $\mathbf{C}(t) = \left(\frac{3}{2}\cos t + \cos^2 t \text{ , } \frac{3}{2}\sin t + \cos t \sin t\right)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ calcular

$$\int_{C^+} \left(\frac{6y}{4x^2+9y^2} - y\right) \mathsf{d}x + \left(\frac{-6x}{4x^2+9y^2}\right) \mathsf{d}y$$

..........................................................................................................

**Problema 4** Sea $V \subset \mathbf{R}^3$ la esfera maciza $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 2\}$ y $S_1, S_2, S_3$ las siguientes superficies

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = 0 \ \wedge \ y \geq 0\right\} \quad S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^4 - z = 0\right\}$$

$$S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^8 + x^2 + y^2 = 2 \right\}$$

Dados los campos vectoriales

$$\boldsymbol{F}_1(x,y,z) = y\mathbf{I} + z\mathbf{J} + x\mathbf{K} \qquad \boldsymbol{F}_2(x,y,z) = \left(xz - \tfrac{1}{2}z^2\right)\mathbf{I} + (yz+xy)\mathbf{J} + e^{\sin(z)}\mathbf{K}$$

Calcular las siguientes integrales :

$$\textbf{i)} \int_{S^*} \boldsymbol{F}_1 \text{ donde } S^* = S_1 \cap V \quad \textbf{,} \qquad \textbf{ii)} \iint_C \boldsymbol{F}_2 \text{ donde } C = S_2 \cap S_3$$

..........................................................................................................

**Problema 5 .** Dada la funciòn $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por la expresión que aparece en (2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^n}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{2}$$

a) Hallar todos lo $n \in N$ de modo tal que $f(x,y)$ resulte integrable en la regiòn

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

b) Con los $n \in N$ hallados en el inciso a) calcular el valor de $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y$

...............................................................



# Resuelto

**Problema 1**. La función es un cociente de polinomios cuyo denominador

$$x^4 + y^4 = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

sólo se anula en el origen. Sean

$$\begin{aligned} P(x, y) &= x^3 y^2 \\ Q(x, y) &= x^4 + y^4 \end{aligned}$$

entonces $\forall (x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \Longrightarrow f'(x, y) = \frac{P'(x, y)Q(x, y) - P(x, y)Q'(x, y)}{Q^2(x, y)}$$

la derivada de la función también es un cociente de polinomios con denominador no nulo, luego $f$ tiene derivadas continuas y por lo tanto es diferenciable en todo $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Queda por analizar el $(0, 0)$.

Chequeamos que sea continua, en tal caso debería cumplirse por definición:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = f(0, 0) = 0$$

Hay básicamente tres maneras de probarlo.

1. Como bien deberíamos saber a esta altura

$$\left(x^2 - y^2\right)^2 \geq 0 \iff \left| \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} \right| \leq \frac{1}{2}$$

y como

$$f(x, y) = x \cdot \left( \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} \right)$$

entonces $f(x, y) \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\longrightarrow} 0$ pues se trata del conocido "cero por acotada".

2. La función es homogénea, i.e.

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$$

la prueba es trivial para $\lambda = 0$ por definición de $f$, y para $\lambda \neq 0$ hay que hacer la cuenta:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^3 (\lambda y)^2}{(\lambda x)^4 + (\lambda y)^4} = \frac{\lambda^5 x^3 y^2}{\lambda^4 \left(x^4 + y^4\right)} = \lambda \cdot \left( \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4} \right) = \lambda f(x, y)$$

El hecho de que $f$ sea homogénea de grado 1, indica que es conveniente pasar a coordenadas polares.

$$\forall\theta \in [0, 2\pi],\ f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \rho\underbrace{f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}_{g(\theta)}$$

Recordemos que el denominador $Q(x, y) = x^4 + y^4$ sólo se anula si $x = y = 0$. Si arbitrariamente tomamos $x = \cos\theta,\ y = \operatorname{sen}\theta$ se tiene $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, no existe ningún valor de $\theta$ para el cual $Q(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = 0$ y

$$g(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \frac{P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}{Q(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}$$

es una función *continua* de *una variable* en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$ por tratarse de un cociente de polinomios en $\theta$ con denominador no nulo. Recordemos de Análisis I el teorema de Weierstrass:

$$\boxed{\text{Toda función continua en un intervalo cerrado es acotada.}}$$

Como $g$ cumple los requisitos del teorema, podemos aplicarlo. La tesis del teorema nos dice que $g$ es acotada, por lo tanto para todo valor de $\theta$ en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$,

$$f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \rho f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \rho g(\theta) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$$

otra vez, “cero por acotada”.

3. Por definición, supongo que nadie hizo esta. Tampoco hace falta.

   Elegimos $\delta = 2\varepsilon$. Esto pone a $\delta$ como función de $\varepsilon$. Por definición de función, para cada $\varepsilon$ existe un único $\delta$, en particular si $\varepsilon > 0$ entonces también $\delta > 0$.

   Es decir que al elegir $\delta = 2\varepsilon$, para cada $\varepsilon$ positivo hay un $\delta$, también positivo... ¿les suena? ¡Es la primera parte de la definición del límite!

   Vamos por la segunda parte, para eso suponemos que se cumple la desigualdad $\|(x - 0, y - 0)\| < \delta$, pero como tomamos $\delta = 2\varepsilon$ entonces la desigualdad equivale a $\|(x, y)\| < 2\varepsilon$. Esta desigualdad es una *hipótesis*.

   Ahora calculamos $\forall(x, y) \neq (0, 0)$

$$|f(x, y) - 0| = |f(x, y)| = \left|\frac{x^3y^2}{x^4 + y^4}\right| = |x| \cdot \left|\frac{x^2y^2}{x^4 + y^4}\right|$$

peeeeroooo $|x| \leq \|(x,y)\|$, ¡y como supusimos que $\|(x,y)\| < 2\varepsilon$, entonces $|x| < 2\varepsilon$ por transitividad! Además, recordemos que

$$\left(x^2 - y^2\right)^2 \geq 0 \iff \left|\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right| \leq \frac{1}{2}$$

con lo cual obtenemos finalmente

$$|f(x,y) - 0| = |x| \cdot \left|\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right| < (2\varepsilon) \cdot \frac{1}{2} = \varepsilon$$

acabamos de probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, de manera tal que se cumple la implicación:

$$\|(x,y)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

La proposición demostrada no es otra cosa que la definición de límite

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

De cualquier manera, la función es continua en el origen, finalmente, es continua en todo $\mathbf{R}^2$.

Calculamos las derivadas, notemos que $f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, esto vale incluso ANTES de hacer el límite (son valores constantes que no dependen de las variables). Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0 \end{aligned}$$

La ecuación del plano tangente a la función $f$ en el punto $O = (0,0)$ es

$$T_{[f,O]}(x,y) = f'(0,0) \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix} + f(0,0) = 0$$

Con lo cual el resto queda $\phi_{[f,O]}(x,y) = f(x,y) - T_{[f,O]}(x,y) = f(x,y)$. Recordemos que $f$ es diferenciable en $O$ si y sólo si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\phi_{[f,O]}(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

No obstante, al tomar una recta por ejemplo $y = x$, o en forma paramétrica $(x, y) = (t, t)$, se tiene

$$\frac{\phi_{[f,O]}(t,t)}{\|(t,t)\|} = \frac{f(t,t)}{|t|\|(1,1)\|} = \frac{tf(1,1)}{\sqrt{2}|t|} = \left(\frac{t}{|t|}\right)\left(\frac{f(1,1)}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

es decir que el resultado depende de si se toma $t > 0$ o $t < 0$, luego

$$\nexists \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\phi_{[f,O]}(x,y)}{\|(x,y)\|}$$

y por lo tanto $f$ no es diferenciable en el origen. En realidad, para demostrar que $f$ no es diferenciable en $O$, basta con probar que se obtiene un número distinto de cero. Esto por lo menos, para una dirección.

RESPUESTA: $f$ no es diferenciable en todo $\mathbf{R}^2$, mas sí en $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

**Problema 2**. En este problema hay dos puntos para resolver. Primero:

a) Analizar si $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R},\ f(x, y) = xy + \sqrt[3]{xy}$ es sobreyectiva.

Para probarlo fijamos por ejemplo $y = 1$, entonces nos queda una función de una variable $\varphi(x) = f(x, 1) = x + \sqrt[3]{x}$ que obviamente es sobreyectiva:

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty \ \wedge \ \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$$

significa esto que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{R}$ y por lo tanto también $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}$. El resultado es independiente del valor de $y$ escogido de antemano.

Geométricamente, esto significa que la superficie que conforma la gráfica de $f$ tiene al menos una curva sobre ella que recorre todo el espacio en forma vertical. Se muestra esta situación en la figura 1. Allí, se ve que la superficie $\mathrm{Gr}(f)$ (gráfica de $f$) contiene la curva

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 & \quad t \in \mathbf{R} \\ z = \varphi(t) \end{cases}$$

Se grafica dicha curva en un plano, también en la figura 1. La referida gráfica representa lo que se ve sobre los puntos del plano $y = 1$.

b) Nos piden el plano tangente a la función $h(x, y) = (f \circ g)(x, y)$ en el punto $P = (1, 1)$. Obviamente, $P$ está en el plano $(x, y)$.

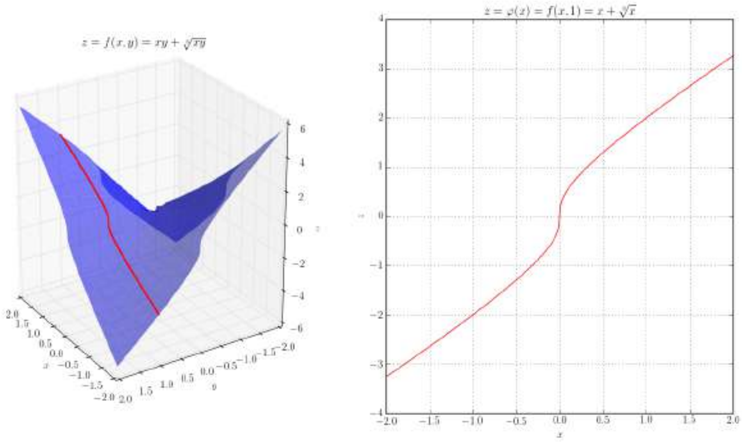

Figura 1: Gráfica de las funciones $f$ y $\varphi$.

Recurrimos a la expresión de siempre:

$$T_{[h,P]}(x,y) = h'(1,1) \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} + h(1,1)$$

Tenemos que calcular dos cosas. En primer lugar,

$$h(1,1) = (f \circ g)(1,1) = f\left[g(1,1)\right] \underset{\text{DATO}}{=} f(2,2) = 2 \cdot 2 + \sqrt[3]{2 \cdot 2} = 4 + \sqrt[3]{4}$$

Para todo lo demás, existe la derivada. Atención que muchos la pifiaron con los puntos, y el ejercicio se les consideró mal resuelto. En principio, déjenme escribir $f(u,v)$ en vez de $f(x,y)$ para no confundir las cuentas.

$$\begin{aligned} f(u,v) &= uv + \sqrt[3]{uv} \\ f'(u,v) &= \begin{bmatrix} v + \frac{1}{3}(uv)^{-\frac{2}{3}}v & u + \frac{1}{3}(uv)^{-\frac{2}{3}}u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En nuestro ejercicio necesitamos $f'[g(x,y)]$ y NO $f(x,y)$, escribir $u$ y $v$ en vez de $x$ e $y$ quizás sirve para avivarse de ello. En este caso, viene a ser $(u,v) = g(x,y)$ y entonces como $(x,y)$ se *mapea* a $(u,v)$ a través de $g$, en particular podemos afirmar que el punto $P = (1,1)$ se mapea a través de $g$ al punto $g(P) = g(1,1) = (2,2)$. ESTE SÍ es el valor que tenemos que sustituir.

Aplicando la regla de la cadena tenemos:

$$h'(x,y) = (f \circ g)'(x,y) = f'\left[g(x,y)\right] g'(x,y) = f'(u,v)g'(u,v)$$

entonces si $(x, y) = P = (1,1)$, $(u, v) = (2,2)$, por dato se tiene

$$h'(1,1) = f'(2,2)g'(1,1) = \left[2 + \tfrac{1}{3}\left(2^2\right)^{-\frac{2}{3}} 2 \quad 2 + \tfrac{1}{3}\left(2^2\right)^{-\frac{2}{3}} 2\right] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \left(2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\right) \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[4 + \tfrac{\sqrt[3]{4}}{3} \quad 0\right]$$

Tenemos todo, $h(1,1) = 4 + \sqrt[3]{4}$ y $h'(1,1) = \left[4 + \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \quad 0\right]$. Queda

$$T_{[h,P]}(x, y) = h'(1,1) \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{bmatrix} + h(1,1) = \left[4 + \tfrac{\sqrt[3]{4}}{3} \quad 0\right] \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{bmatrix} + 4 + \sqrt[3]{4} =$$

$$= \left(4 + \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)(x - 1) + 4 + \sqrt[3]{4} = \left(4 + \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right) x + \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$$

Esta es la respuesta final.

RESPUESTA: el plano tangente a $h$ en el punto $P = (1,1)$ tiene la ecuación siguiente.

$$z = \left(4 + \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right) x + \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$$

**Problema 3**. Designemos al campo como $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{6y}{4x^2+9y^2} - y, \frac{-6x}{4x^2+9y^2}\right)$. Dada la curva paramétrica $\mathbf{C}(t) = \left(\frac{3}{2}\cos t + \cos^2 t, \frac{3}{2}\operatorname{sen} t + \cos t \operatorname{sen} t\right)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, lo que se pide es la integral curvilínea a lo largo de $C$.

Verifiquemos primero que $C$ está siendo recorrida antihorario, como pide la consigna. Podemos darle un par de valores para verificarlo, por ejemplo $\mathbf{C}(0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $\mathbf{C}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\mathbf{C}(\pi) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Se ve que, a medida que aumenta $t$, la parametrización describe un arco de curva que se recorre antihorario. De hecho

$$\mathbf{C}(t) = \left(\left(\tfrac{3}{2} + \cos t\right)\cos t, \left(\tfrac{3}{2} + \cos t\right)\operatorname{sen} t\right)$$

es la parametrización de la curva en coordenadas polares $\rho = \frac{3}{2} + \cos\theta$, que se denomina *cardioide*. Ya deben haberla visto. Si no la vieron, deléitense con la magistral figura número 2.

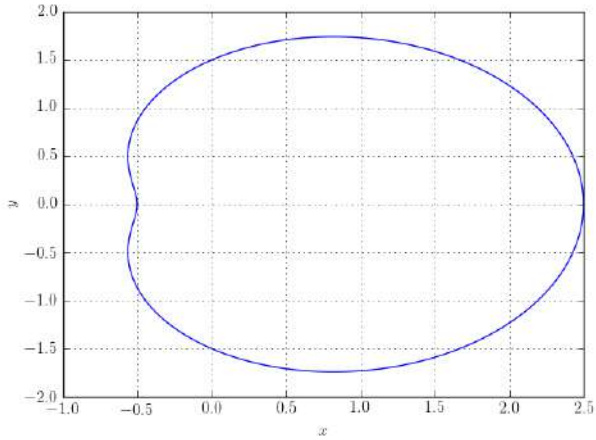


Figura 2: Gráfica de la cardioide $\rho = \frac{3}{2} + \cos\theta$.

El campo puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}(x,y) = \underbrace{\left(\frac{6y}{4x^2+9y^2}, \frac{-6x}{4x^2+9y^2}\right)}_{\mathbf{F}_1(x,y)} + \underbrace{(-y,0)}_{\mathbf{F}_2(x,y)}$$

con lo cual, por linealidad, la integral pedida es

$$\int_{C^+} \mathbf{F} = \int_{C^+} \mathbf{F}_1 + \int_{C^+} \mathbf{F}_2.$$

Hacemos esta cuenta en dos pasos.

1. Primero, calculamos la integral sobre $\mathbf{F}_1$. El campo no está definido en todo el interior de la curva $C$, pues tiene al origen como punto de indefinición. Para calcular la integral, conviene aplicar la *extensión* del teorema de Green a regiones múltiplemente conexas.

   Para ver que realmente el teorema facilite la cuenta, tenemos que calcular el rotacional escalar, a veces denominado también como "rotor", a secas. El nombre no importa, lo que SÍ importa es que

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) &= D_x\left(\frac{-6x}{4x^2+9y^2}\right) - D_y\left(\frac{6y}{4x^2+9y^2}\right) = \\
&= \frac{-6\left(4x^2+9y^2\right) - (-6x)(8x)}{\left(4x^2+9y^2\right)^2} - \frac{6\left(4x^2+9y^2\right) - (6y)\left(18y^2\right)}{\left(4x^2+9y^2\right)^2} = \\
&= \frac{-24x^2 - 54y^2 + 48x^2}{\left(4x^2+9y^2\right)^2} - \frac{24x^2 + 54y^2 - 108y^2}{\left(4x^2+9y^2\right)^2} = \\
&= \frac{24x^2 - 54y^2}{\left(4x^2+9y^2\right)^2} - \frac{24x^2 - 54y^2}{\left(4x^2+9y^2\right)^2} = 0
\end{aligned}$$

y con lo cual el teorema simplificará MUCHO la cuenta.

Encerramos al origen con una curva arbitraria, particularmente conviene una elipse de la forma

$$4x^2 + 9y^2 = R^2$$

por la forma en la que se encuentra definido el campo $\mathbf{F}_1$. El radio $R$ puede elegirse arbitrariamente pequeño, o grande, según se quiera. Como el origen es un punto interior de la región delimitada por $C$, de seguro existe un disco de cierto radio que lo envuelve. Basta tomar $R$ como ese radio. Otra justificación sería la siguiente: como $C$ es acotada, existe un disco de cierto radio que envuelve toda la curva (y por lo tanto, el origen). Asignaríamos a $R$ un valor mayor o igual que dicho radio, y listo.

Eligiendo alguno de los dos métodos (la verdad, da igual, la integral no depende del radio escogido) una parametrización de la elipse es

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2,\ \gamma(t) = \left(\frac{1}{2}R\cos t, \frac{1}{3}R\operatorname{sen} t\right)$$

Ahora aplicamos la extensión. Recordemos que esta consiste en *unir* un par de puntos arbitrarios de $C$ y $\gamma$, de manera que se formen dos regiones simplemente conexas (ver figura 3). Se aplica el teorema de Green sobre ellas, de manera que las integrales de línea sobre las curvas de unión se cancelan y queda:

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} \mathbf{F}_1 = \int_{\gamma^+} \mathbf{F}_1 = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_1\left[\gamma(t)\right] \cdot \gamma'(t)\, dt = \\
= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2R\operatorname{sen} t}{R^2}, \frac{-3R\cos t}{R^2}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{2}R\operatorname{sen} t, \tfrac{1}{3}R\cos t\right)\, dt = -2\pi.
\end{aligned}$$

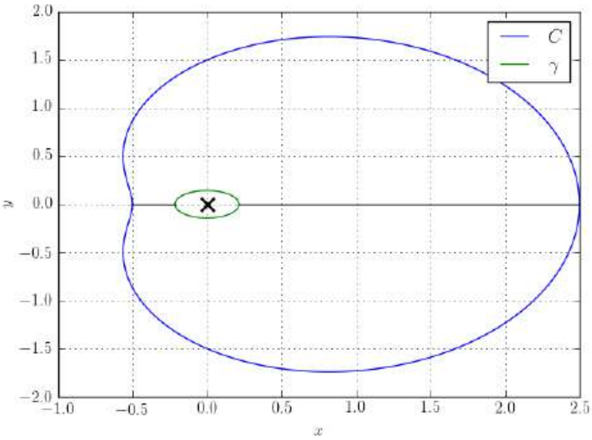


Figura 3: Extensión del teorema de Green, aplicada a las curvas $C$ y $\gamma$.

Por ahora tenemos la integral del campo $\mathbf{F}_1$, nos queda la

2. integral de $\mathbf{F}_2$. Esta puede calcularse a mano, o si no, como $\operatorname{rot}(-y,0) = 1$ y el campo $(-y,0)$ está definido por completo dentro de $C$, vale el teorema de Green. Queda:

$$\int_{C^+} \mathbf{F}_2 = \text{área}[\text{int}(C)]$$

y el área puede calcularse muy fácil con las coordenadas polares.

$$\text{área}[\text{int}(C)] = \iint_{\text{int}(C)} dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{2}+\cos\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{11}{4}\pi.$$

Independientemente de las dos cuentas, el resultado final queda

$$\int_{C^+} \mathbf{F} = \int_{C^+} \mathbf{F}_1 + \int_{C^+} \mathbf{F}_2 = -2\pi + \frac{11}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi.$$

$$\boxed{\text{RESPUESTA: } \int_{C^+} \mathbf{F} = \frac{3}{4}\pi.}$$

**Problema 4**. Problemas de integral curvilínea e integral de superficie.
**i**) nos piden la integral del campo

$$\mathbf{F}_1 : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3,\ \mathbf{F}_1(x,y,z) = y\mathbf{I} + z\mathbf{J} + x\mathbf{K}$$

sobre la superficie $S^* = S_1 \cap V$ donde $S_1$ es el cono "acostado"sobre el eje $y$

$$S_1 : x^2 - y^2 + z^2 = 0 \wedge y \geq 0 \quad \text{o bien } y = \sqrt{x^2 + z^2}$$

y $V$ es una *esfera maciza*

$$V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2.$$

La intersección es fácil, sustituimos el $y$ despejado $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ en la inecuación de la bola sólida, y tenemos

$$x^2 + \left(\sqrt{x^2 + z^2}\right)^2 + z^2 \leq 2 \iff x^2 + z^2 \leq 1$$

con lo cual $S^* : y = \sqrt{x^2 + z^2} \wedge x^2 + z^2 \leq 1$. Podemos ver también a la superficie $S^*$ como la gráfica de la función $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$ con $D : x^2 + z^2 \leq 1$, definida por la expresión $g(x, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$.

El vector normal positivo sale casi automáticamente, por ser $S^* = \mathrm{Gr}(g)$.

$$\mathbf{n}(x, z) = -g_x(x, z)\mathbf{I} + \mathbf{J} - g_z(x, z)\mathbf{K} = -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)\mathbf{I} + \mathbf{J} - \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)\mathbf{K}$$

la expresión del campo sobre la superficie queda

$$\mathbf{F}_1\left(x, g(x, z), z\right) = \left(\sqrt{x^2 + z^2}\right)\mathbf{I} + z\mathbf{J} + x\mathbf{K}$$

el producto escalar es

$$\mathbf{F}_1\left(x, g(x, z), z\right) \cdot \mathbf{n}(x, z) = -x + z - \frac{xz}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \int_{S^*} \mathbf{F}_1 &= \iint_D \mathbf{F}_1\left(x, g(x, z), z\right) \cdot \mathbf{n}(x, z)\, dx\, dz = \\ &= \iint_D \left(-x + z - \frac{xz}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right) dx\, dz. \end{aligned}$$

Para hacerla rápido, cambiamos a polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ z = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases}, \quad 0 < \theta < 2\pi \Longrightarrow dx\, dz = \rho\, d\rho\, d\theta$$

la región $D$ se transforma en un rectángulo $R = [0,1] \times [0, 2\pi]$ luego

$$\int_{S^*} \mathbf{F}_1 = \iint_R \left( -\rho\cos\theta + \rho \operatorname{sen}\theta - \frac{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\rho} \right) \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= - \underbrace{\left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta) \right] d\theta \right\}}_{0} \left( \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \right) = 0.$$

**ii**) Nos piden la integral del campo

$$\mathbf{F}_2(x,y,z) = \left(xz - \tfrac{1}{2}z^2\right)\mathbf{I} + (yz + xy)\mathbf{J} + e^{\operatorname{sen} z}\mathbf{K}$$

sobre la curva $C = S_2 \cap S_3$ donde $S_2 : z = x^4$ es un cilindro parabólico y $S_3 : x^8 + x^2 + y^2 = 2$ es un cilindro también, pero de distinta especie.

Calcular la integral curvilínea a mano parece muy complicado, así que vamos a cruzar los dedos y rezar para que el rotor dé algo sencillo.

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}_2) = -y\mathbf{I} + (x - z)\mathbf{J} + y\mathbf{K}$$

No hizo falta rezar mucho. Ahora elegimos una superficie que tenga como borde a la curva $C$. En principio, hay dos posibles: $S_2$ y $S_3$, pues es su intersección la que genera $C$. Más formalmente,

$$\begin{array}{lrcl} A: & x^4 - z = 0 & \wedge & x^8 + x^2 + y^2 \leq 2 \\ B: & x^8 + x^2 + y^2 = 2 & \wedge & x^4 - z \leq 0 \end{array}$$

(notar que también podría ser $x^4 - z \geq 0$). Al calcular los vectores normales

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_A &= -4x^3\mathbf{I} + \mathbf{K} \\ \mathbf{n}_B &= \left(8x^7 + 2x\right)\mathbf{I} + 2y\mathbf{J} \end{aligned}$$

y el respectivo producto escalar, en cada caso, se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{n}_A &= 4x^3 y + y \\ \operatorname{rot}(\mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{n}_B &= -8x^7 y - 2xy + 2(x - z)y \end{aligned}$$

con lo cual, en principio, estas superficies no nos solucionan sustancialmente el problema. El truco está en notar que, al estar $C$ definida por

$x^4 - z = 0$, entonces puede sustituirse $z = x^4$ en la segunda ecuación para obtener una equivalente:

$$C : x^4 - z = 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

entonces *otra* superficie que tiene como borde a $C$ es

$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \wedge x^4 - z \leq 0$$

cuyo vector normal es

$$\mathbf{n}_\Gamma = 2x\mathbf{I} + 2y\mathbf{J} + 2z\mathbf{K}$$

con lo cual

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{n}_\Gamma = -2xy + (x - z)(2y) + 2zy = 0$$

y listo. Finalmente obtenemos, por el teorema de Stokes, que la integral pedida es cero. En el final escribimos ordenadamente:

$$\boxed{\text{Respuesta: } \int_C \mathbf{F}_2 = 0.}$$

**Problema 5** Nos dan la función partida $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y nos piden, primero,

a) Hallar todos lo $n \in \mathbf{N}$ de modo tal que $f(x,y)$ resulte integrable en la región

$$D : x^2 + y^2 \leq 1.$$

Muchos, al plantear este problema, escribieron que para que $f$ fuera integrable, tenía que ser *continua*. Bueno esto muestra un error lógico muy común, a veces cuando analizamos implicaciones lógicas, nos "olvidamos"del sentido que toma el símbolo de *implicación material* (habitualmente llamada "flechita"$\Longrightarrow$). Pasa en Análisis I con el teorema de Rolle, también con aquel que dice que es condición *necesaria* pero *no suficiente* que una derivada se anule para que tenga extremo local, etc...

Voy a explicarme un poco. En los cursos de Análisis Matemático I se da (debería dar) el siguiente teorema.

Si una función de una variable es continua en un cierto intervalo real, entonces es también integrable en dicho intervalo.

Nótese la *dirección* de la implicación material, estamos diciendo que una función (llámese $g$) en un intervalo real (llámese $I$) cumple siempre que

$$g \text{ continua en } I \Longrightarrow g \text{ integrable en } I.$$

El recíproco *no necesariamente* es cierto, a saber,

$$g \text{ continua en } I \Longleftarrow g \text{ integrable en } I, \qquad \text{o bien}$$
$$g \text{ integrable en } I \Longrightarrow g \text{ continua en } I.$$

Como contraejemplo sencillo, tómese cualquier función discontinua con *salto finito*, por ejemplo $g(x) = \mathrm{sg}(x)$ (función *signo*):

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{sg}(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} dx = (-1) + 1 = 0.$$

Así que el recíproco *no es cierto.* ¿Se entiende? Permítaseme repetirlo una vez más, para que quede claro: ¡no es necesario que la función sea continua en un intervalo para ser integrable!

El razonamiento análogo aplica en varias variables, pero en vez de intervalos, consideramos regiones del plano.

Ahora sí, podemos seguir.

Necesitamos que, de haber discontinuidades, estas sean como mucho *esenciales de salto finito.* Esto sale fácil al analizar límites curvilíneos. Les mostraré lo que ocurre para $n = 2$, para que entiendan de qué hablo.

$$\underline{n = 2} : \forall t \neq 0, f(t,t) = \frac{t^3}{\left(2t^2\right)^2} = \frac{1}{4t} \xrightarrow[t \to 0]{} \infty$$

Para $n = 2$, hay un salto infinito a medida que nos acercamos al origen, en este caso a través del camino $y = x = t$. El camino, de todos modos, no importa, lo que sí importa es que la función *no es acotada.* Y basta con un camino para probarlo.

Tratemos de ver para qué valores de $n$ SÍ lo está.

$$\forall (x,y) \neq (0,0), |f(x,y)| = \left| \frac{xy^n}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right| = \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| |y|^{n-3}$$

Como bien deberíamos saber a esta altura, ... qué digo saber, lo deberíamos *recontra saber*...

$$(|x| - |y|)^2 \geq 0 \iff \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

y además

$$x^2 \geq 0 \iff \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$$

con lo cual $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|y|^{n-3}$. Esto nos dice que $f$ es acotada en $D$ para todo $n \geq 3$. En particular, si $n = 3$, ¡la función está acotada en todo $\mathbf{R}^2$!

| RESPUESTA: los $n \in \mathbf{N}$ que hacen *integrable* a $f$ en $D$ son los $n \geq 3$. |
|---|

b) Nos piden la integral doble de la función $f$ sobre el disco unitario $D$, para los $n$ hallados. Dijimos que tiene que ser $n \geq 3$ para que la integral salga, entonces teniendo en cuenta esto, planteamos

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_D \frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

Cambiamos a polares

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}, \quad 0 < \theta < 2\pi \Longrightarrow dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$$

la región $D$ se transforma en un rectángulo $R = [0,1] \times [0,2\pi]$ luego

$$\begin{aligned}\int_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho^{n+1}\cos\theta\operatorname{sen}^n\theta}{\rho^4}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \\ &= \left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\operatorname{sen}^n\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^{n-2}\,d\rho\right)\end{aligned}$$

cambio de variable: $u = \operatorname{sen}\theta$ queda

$$\int \cos\theta\operatorname{sen}^n\theta\,d\theta = \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\operatorname{sen}^{n+1}\theta}{n+1} + C$$

con lo cual la respuesta es

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \left[\frac{\operatorname{sen}^{n+1}\theta}{n+1}\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^{n-1}}{n-1}\right]_0^1 = 0.$$

Y listo.