ANALISIS 2 . (Ingenieria) Segundo parcial. (16 de Noviembre de 2017)(Comision Ma-Ju-Mañana)

NOMBRE :..e-mail............................NOTA.............

Problema 1. (20) Hallar el area de la región $D \subset \mathbf{R}^2$ encerrada por la curva C que figura a continuación :

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - \left(x^2 + y^2 - x\right)^2 = 0 \right\}$$

....

Problema 2 : (20) Calcular el volumen limitado por las superficies S_1 y S_2 siendo respectivamente :

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{(x-z)^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1 \right\} \qquad S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2y = 0 \right\}$$

....

Problema 3 : (20) Dado el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = \left(-5x^4 \sin x^5 - y\right) \mathbf{I} + \left(5y^4 \sin y^5 + x\right) \mathbf{J}$ calcular la siguiente integral de linea :

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F}$$

donde $C \subset \mathbf{R}^2$ es la curva definida por

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : y + 3|x| = 8 \quad \wedge \quad y \geqslant x \right\}$$

....

Problema 4 : (20) Sea $f : R \longrightarrow R$ una función diferenciable y $C \subset R^3$ una curva definida como $C = S_1 \cap S_2$ donde S_1 y S_2 son las superficies siguientes

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z - 4 = 0 \right\} \qquad S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 - 4x - z + 4 = 0 \right\}$$

a) Probar que la curva es *cerrada*, *simple* y *plana*.
b) Orientar la curva de manera conveniente y calcular la siguiente integral

$$\int_{C^+} (zf(x) - y)\, \mathrm{d}x + (x - 3z)\, \mathrm{d}y + \left(f^2(z)\right) \mathrm{d}z$$

....

Problema 5: (20) Sean los siguientes campos vectoriales

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1(x, y, z) = \left(2xz + x + 3y^7\right) \check{\mathbf{I}} + \left(7x^5 + 6y - 9z^5\right) \check{\mathbf{J}} + \left(xy - z^2 - z\right) \check{\mathbf{K}} \\ \mathbf{F}_2(x, y, z) = \left(x + yze^{\sin z}\right) \check{\mathbf{I}} + \left(y + e^{xz} \cos x\right) \check{\mathbf{J}} + \left(z + y^5\right) \check{\mathbf{K}} \end{cases}$$

y las superficies

$$\begin{cases} S_1 : \mathbf{S}_1(u, v) = \left(\cos u \ , \ \sin u \ , \ v\right) \quad \text{donde } 0 \le u \le 2\pi \ , \ -1 \le v \le 0 \\ S_2 : \mathbf{S}_2(u, v) = \left(u \ , \ v \ , \ c\left(1 - u^2 - v^2\right)\right) \quad \text{donde } 0 \le u^2 + v^2 \le 1 \ , \ 0 < c \end{cases}$$

Hallar (si es que existe) $c \in R_{>0}$ tal que

$$\int_{S_1} \mathbf{F}_1 = \int_{S_2} \mathbf{F}_2$$

....

RESUELTO

Agradezco a: Federico Bosio por las correcciones y sugerencias

Problema 1.

Bueno, con la curva dada $C = \{(x, y) \in R^2 :\ x^2 + y^2 - (x^2 + y^2 - x)^2 \ = 0\ \}$ nos piden hallar el área dentro de ella. Por si no lo sabían (lo cual es muy probable) la curva C es una CARDIOIDE, donde una de las posibles parametrizaciones seria.

$$C(t) = \big((1 + \cos(t))\cos(t)\,; (1 + \cos(t))\sin(t)\big) \quad con\ t \in [0; 2\pi]$$

Si analizamos bien esta parametrización, podríamos decir que su radio depende únicamente del término $(1 + \cos(t))$. ¿Por qué? Y, por ejemplo, si analizo una curva cualquiera llamada C_n cuya parametrizacion es $C_n(t) = (3\cos(t)\,; 3\sin(t))$, es fácil de ver que el radio de la circunferencia es $r = 3$, bueno, con la cardioide pasa algo parecido, más adelante se van a dar cuenta de que estoy hablando. (Suspenso…).

En fin, es muy difícil darse cuenta que es una cardioide, un método óptimo para resolver el cálculo de área es aplicar las confiables coordenadas polares. Por ende llamo:

$$x = r\ cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

Bien, ya sabemos que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ahora nos queda ver el radio máximo que alcanzara nuestra querida cardioide, basta con reemplazar el cambio de variable en nuestra curva original.

$$\big(r\cos(\theta)\big)^2 + \big(r\sin(\theta)\big)^2 - \Big(\big(r\cos(\theta)\big)^2 + \big(r\sin(\theta)\big)^2 - r\cos(\theta)\Big)^2 = 0$$

$$r^2 - \big(r^2 - r\cos(\theta)\big)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 - \big(r\,(r - \cos(\theta)\big)^2 = 0$$

$$r^2\Big(1 - \big(r - \cos(\theta)\big)^2\Big) = 0$$

ACLARACION IMPORTANTE: Ya que $r > 0$, puedo dividir miembro a miembro por r^2

$$1 - \big(r - \cos(\theta)\big)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \big(r - \cos(\theta)\big)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad r - \cos(\theta) = 1$$

$$Oh\ casualidad\ \ldots\ r = 1 + \cos(\theta)$$

Por ende, el radio va entre $0 < r \leq 1 + \cos(\theta)$

Bueno, ahora que tenemos el radio máximo, aplicamos los extremos a la integral doble sin olvidarse del jacobiano. Queda:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos(\theta)} r\ drd\theta \ = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1+\cos(\theta)} d\theta \ = \int_0^{2\pi}\frac{(1 + \cos(\theta))^2}{2}\,d\theta$$

$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_0^{2\pi} 1\, d\theta}_{= \mathbf{2\pi}} + 2\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\ d\theta}_{= \mathbf{0}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} cos^2(\theta)\, d\theta}_{= \boldsymbol{\pi}}\right) = \frac{3}{2}\pi \rightarrow Area\ "D$$

<u>Método Alternativo</u>

Otra forma de encarar el ejercicio, seria utilizando el teorema de Green. Para ello hubiésemos requerido conocer la parametrización de la curva C, lo cual es muy difícil de deducir con solo mirar su implícita, pero bueno, vamos a encararlo así.

Si parametrizamos la curva C tal que $C(t) = \big((1+\cos(t))\cos(t)\,;(1+\cos(t))\sin(t)\big)\ con\ t \in [0;2\pi]$, siendo C una curva c*errada, simple,* y *regular por tramos*, y planteamos el campo $F(x,y) = (0;x)$, en donde el $int(C) = D$ forma un recinto simplemente conexo, puedo afirmar que cumple con las condiciones necesarias para aplicar el teorema de Green.

Bien, aplico el teorema con la curva C y el campo F.

$$\oint_C F = \iint_D Rot(F)\, dD \quad \rightarrow \quad Ya\ que\ Rot(F) = 1 \quad \rightarrow \quad \oint_C F = Area\ "D"$$

Queda plantear la integral curvilínea (que es bastannnnte fea).

$$\oint_0^{2\pi} \big((1+cos(t))\,cos(t)\big)\cdot\big(-sin^2(t) + cos(t) + cos^2(t)\big)\ dt \quad \rightarrow\ Por\ tabla = \frac{3}{2}\pi$$

Copperfield un poroto.

Problema 2.

Nos piden el volumen entre

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in R^3 :\ \frac{(x-z)^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1\right\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in R^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2y = 0\}$$

Las superficies son un tanto complicadas de ver, la primer superficie no tanto, es un elipsoide rotado en z, pero para la segunda superficie hay que hacer un par de operaciones algebraicas para darnos cuenta (supongo que ya saben que voy a hacer).

$$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad S_2 = (x-z)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Como verán, S_2 es un cilindro también rotado en z. Todo nos indica que vamos a tener que hacer un cambio de variables.

Llamamos:

$$\begin{cases} u = x - z \\ v = y \\ w = z \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} S_1(u,v,w) : \dfrac{u^2}{4} + \dfrac{v^2}{4} + \dfrac{w^2}{25} = 1 \\ \\ S_2(u,v,w) : u^2 + (v-1)^2 = 1 \end{array}$$

$$Jacobiano_1 : \left|\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\right|^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = 1$$

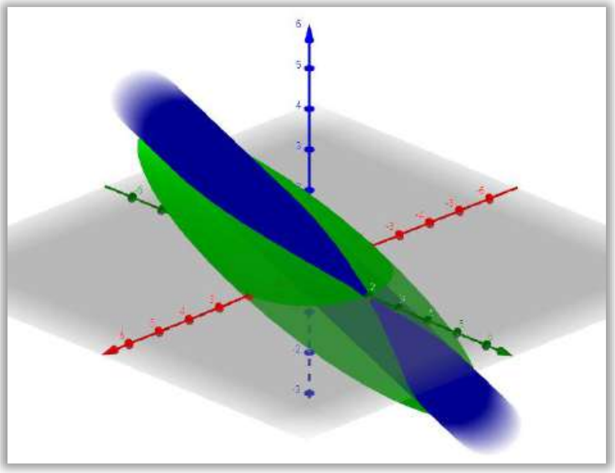

Figura 1: Antes del cambio de variables

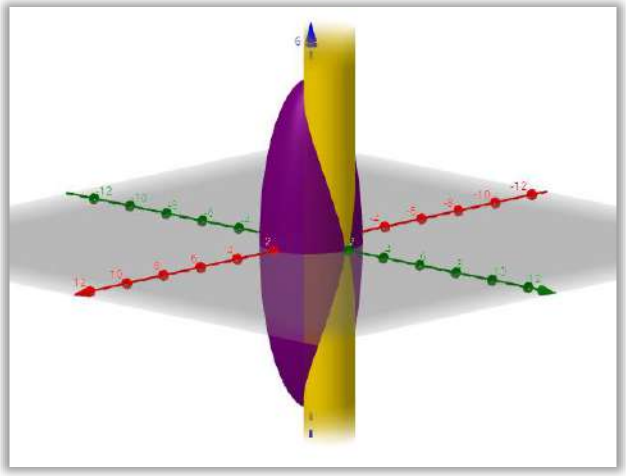

Figura 2: Después del cambio de variables

Parece una publicidad de implante capilar, pero bueno, sigamos.

Como se puede ver en la figura 2, el cambio de variables nos favoreció notablemente, pues que ahora la proyección de la intersección sobre el plano (x,y) me queda una hermosa circunferencia desplazada. ¿Cómo me doy cuenta que la intersección es una circunferencia? Bueno, si a un cilindro S_c: $x^2 + y^2 = 1$ lo "*corto*" con cualquier superficie (a no ser un plano perpendicular al plano (x,y)) siempre (bueno… casi siempre) la proyección sobre el plano (x,y) será el mismísimo cilindro.

Entonces, ya que la proyección de la intersección sobre el plano (x,y) es la circunferencia.

$$Proy_{(x,y)} : \ u^2 + (v-1)^2 = 1$$

Nos queda definir los extremos de z y ya podemos plantear la integral.

$$S_1(u,v,w) : \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{w^2}{25} = 1 \quad \rightarrow \quad w = \pm 5 \sqrt{1 - \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{4}}$$

$$Techo:\ w = +5\sqrt{1-\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{4}} \quad - \quad Piso:\ w = -5\sqrt{1-\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{4}}$$

La integral quedaría.

$$\iint\limits_{u^2+(v-1)^2\leq 1} \int\limits_{-5\sqrt{1-\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{4}}}^{5\sqrt{1-\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{4}}} dwdvdu \ = \iint\limits_{u^2+(v-1)^2\leq 1} 10\sqrt{1-\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{4}}\ dvdu$$

Quedo media fea, hagamos un cambio de variables.

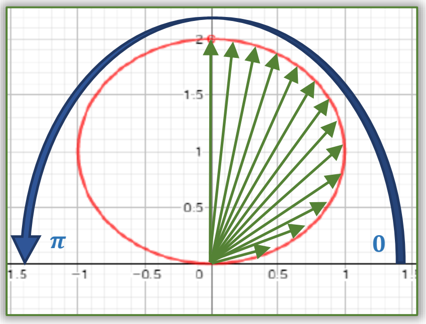

Figura 3: Proyección sobre el (x, y)

$$\begin{cases} u = r\cos(\theta) \\ v = r\sin(\theta) \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\sin(\theta) \end{matrix}$$

$$Jacobiano_2:\ \left|\frac{d(u,v)}{d(r,\theta)}\right| = r$$

Va devuelta la integral.

$$10\int_0^{\pi}\underbrace{\left(\int_0^{2\sin(\theta)} r\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}\ dr\right)}_{In.1}d\theta$$

- $In.1:\ \displaystyle\int_0^{2\sin(\theta)} r\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}\ dr \ \rightarrow\ Trato\ la\ integral\ como\ indefinida\ y\ llamo$

$$\begin{matrix} t = 1-\dfrac{r^2}{4} \\ dt = -\dfrac{1}{2}r\,dr \end{matrix} \ \rightarrow\ -2\int\sqrt{t}\ dt \ = \ -2\left[\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\right] \ \rightarrow Reemplazo \quad \begin{matrix} t = 1-\dfrac{r^2}{4} \\ 0 \leq r \leq 2\sin(\theta) \end{matrix}$$

$$-\frac{4}{3}\left[\left(1-\frac{r^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\sin(\theta)} \ = \ -\frac{4}{3}\left[\big(\underbrace{1-\sin^2(\theta)}_{=\boldsymbol{\cos^2(\theta)}}\big)^{\frac{3}{2}}-1\right] = -\frac{4}{3}\left[(\cos^2(\theta))^{\frac{3}{2}}-1\right]$$

SUMA ATENCIÓN AL SIGUIENTE PASO (el día del parcial TODOS se equivocaron en este paso (me incluyo)).

$$-\frac{4}{3}[|\cos^3(\theta)| - 1]$$

¿Porque $|\cos^3(\theta)|$ y no $\cos^3(\theta)$? Bueno, observemos el siguiente desarrollo.

$$(\cos^2(\theta))^{\frac{3}{2}} = \left((\cos^2(\theta))^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt[2]{(\cos(\theta))^2}\right)^3 = (|\cos(\theta)|)^3 = |\cos^3(\theta)|$$

Si no nos percatábamos de ese error nos cambia el resultado abruptamente. Sigo.

$$In.1 = -\frac{4}{3}[|\cos^3(\theta)| - 1] \quad \rightarrow \quad Lo\ reemplazo\ en\ la\ integral\ original$$

$$10\left(-\frac{4}{3}\right)\int_0^\pi [|\cos^3(\theta)| - 1]\, d\theta = -\frac{40}{3}\left(\underbrace{\int_0^\pi |\cos^3(\theta)|\, d\theta}_{=\frac{4}{3}} - \underbrace{\int_0^\pi d\theta}_{=\pi}\right)$$

$$-\frac{40}{3}\left(\frac{4}{3} - \pi\right) = -\frac{160}{9} + \frac{40}{3}\pi \quad \rightarrow \quad Vol(V)$$

Problema 3.

Nos dan el campo $F(x,y) = (-5x^4\sin(x^5) - y\,; 5y^4\sin(y^5) + x)$ y la curva de forma implícita tal que $C: y + 3|x| = 8 \wedge y \geq x$. Medio extraño el ejercicio, pero bueno, vamos a graficarlo.

La integral curvilínea puede ser que salga, pero dudo que sea fácil, asique intentemos aplicar el teorema de Green. Por ello, necesito un recinto “D” cerrado y simplemente conexo.

La curva NO está cerrada, el $y \geq x$ me está delimitando la curva, es decir, que de toda la curva $C: y + 3|x| = 8$ quiero solamente todos los (x,y) que cumplan $y \geq x$. Por lo cual, planteo la curva λ siendo:

$$\lambda(t) = (6t - 4\,; 6t - 4) \text{ con } t \in [\,0\,;1\,]$$

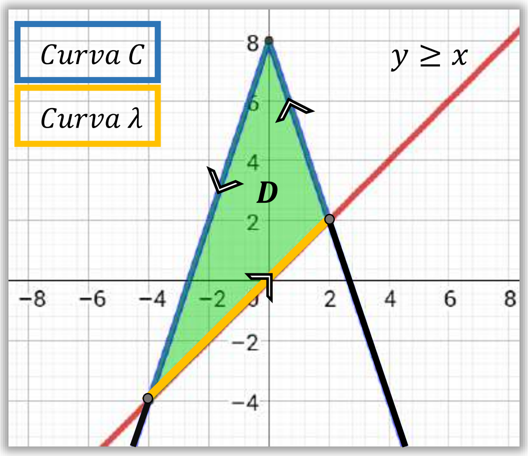

***Figura* 4**:Curva C, λ y recinto D

La parametrización de λ sale de una manera muy sencilla, utilizando el método “Polero” (correctamente llamado **interpolación lineal**) para segmentos lineales:

$\vec{A} + (\vec{B} - \vec{A}) \cdot t\ con\ 0 \leq t \leq 1$, siendo $\vec{A} = (-4\,;\,-4)$ y $\vec{B} = (2\,;2)$ los puntos que quiero “*unir*”.

Ahora SI, con la curva $C \cup \lambda$ puedo aplicar el teorema de Green. Va el planteo.

$$\int_{C^+} F + \int_{\lambda^+} F = \iint_D Rot(F)\, dD \quad \to \quad \begin{array}{c} Rot(F) = Q_x - P_y = 2 \\ \bullet\ Q_x = 1 \\ \bullet\ P_y = -1 \end{array}$$

$$\int_{C^+} F + \int_{\lambda^+} F = 2\iint_D dD \quad \to \quad \int_{C^+} F + \int_{\lambda^+} F = 2 \cdot Area\ D$$

- $\int_{\lambda^+} F:\ Llamo\ \alpha = 6t - 4\ para\ simplificar\ la\ cuenta \ \to\ Si \begin{array}{l} t = 1 \ \to\ \alpha = 2 \\ t = 0 \ \to\ \alpha = -4 \end{array}$

$$\int_{-4}^{2} \left[\left((-5(\alpha)^4 \sin((\alpha)^5)) - (\alpha)\right); \left(5(\alpha)^4 \sin((\alpha)^5) + (\alpha)\right)\right] \cdot [(6\,;6)]\ d\alpha$$

$$6\int_{-4}^{2} \left((-5(\alpha)^4 \sin((\alpha)^5)) - (\alpha)\right) + \left(5(\alpha)^4 \sin((\alpha)^5) + (\alpha)\right) d\alpha = 0$$

- $Area\ D$: Hay que plantear dos integrales ya que hay un cambio de "*techo*" en el recinto.

$$\int_{-4}^{0}\int_{x}^{8+3x} dydx + \int_{0}^{2}\int_{x}^{8-3x} dydx = Area\ D \quad \to \quad 16 + 8 = 24 \ \to Area\ D$$

Rejunto todos los resultados y queda.

$$\int_{C^+} F + 0 = 2 \cdot (24) \quad \to \quad \int_{C^+} F = 48$$

Problema 4.

Inciso a) Hay que demostrar que la curva que surge de la intersección de las superficies.

$$S_1: x^2 + y^2 + z - 4 = 0$$

$$S_2: x^2 + y^2 - 4x - z + 4 = 0$$

es una curva *plana, simple* y *cerrada.*

Bien, para demostrar que es **plana**, basta con ejecutar combinaciones lineales entre las superficies de manera tal que dicha combinación lineal resulte un **plano.** Esto sucede porque las superficies S_1 y S_2 son "*implícitas*" de la curva C, entonces, si combino las ecuaciones de estas implícitas tal que me resulte un **plano**, este plano también será una implícita de la curva, lo cual demuestra que **la curva está contenida en un plano**. Vamos por ello.

$$S_1 - S_2 = 0 \longrightarrow \ x^2 + y^2 + z - 4 - x^2 - y^2 + 4x + z - 4 = 0 \longrightarrow \underbrace{z + 2x - 4 = 0}_{\boxed{\boldsymbol{Plano}}}$$

Para demostrar que es cerrada y simple, puedo proyectar la curva sobre el plano (x, y), verificar que es cerrada sobre (x, y) y luego "*elevarla*" o "*levantarla*" hasta la gráfica de una función. (S_1 y S_2 son graficas de funciones, ya que se puede despejar una variable con respecto de las demás).

$$\begin{array}{r} S_1: z = 4 - x^2 - y^2 \\ S_2: z = x^2 + y^2 - 4x + 4 \end{array} \ \longrightarrow \ 4 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4 \ \longrightarrow \ 2x^2 + 2y^2 - 4x = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad \longrightarrow \quad \underbrace{(x-1)^2 + y^2 = 1}$$

Si a esta curva $C_{x,y}$ la "*elevo*" o "*levanto*" a S_1, S_2 o el plano, va a seguir siendo cerrada y simple.

Circunferencia de r = 1
↳ SIMPLE ↳ CERRADA

$$\therefore C \ es\ plana, cerrada\ y\ simple$$

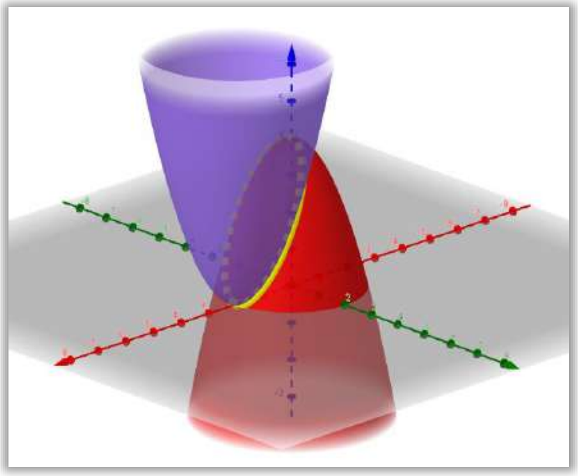

***Figura* 5**: Paraboloides S_1 y S_2

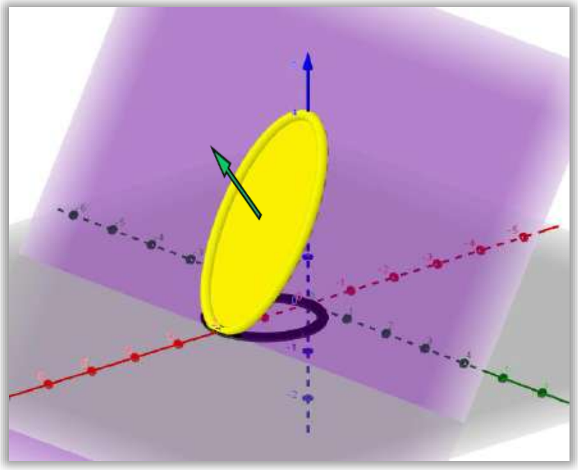

***Figura* 6**: La curva C_+ contenida en el plano y con la normal compatible con el sentido de C_+

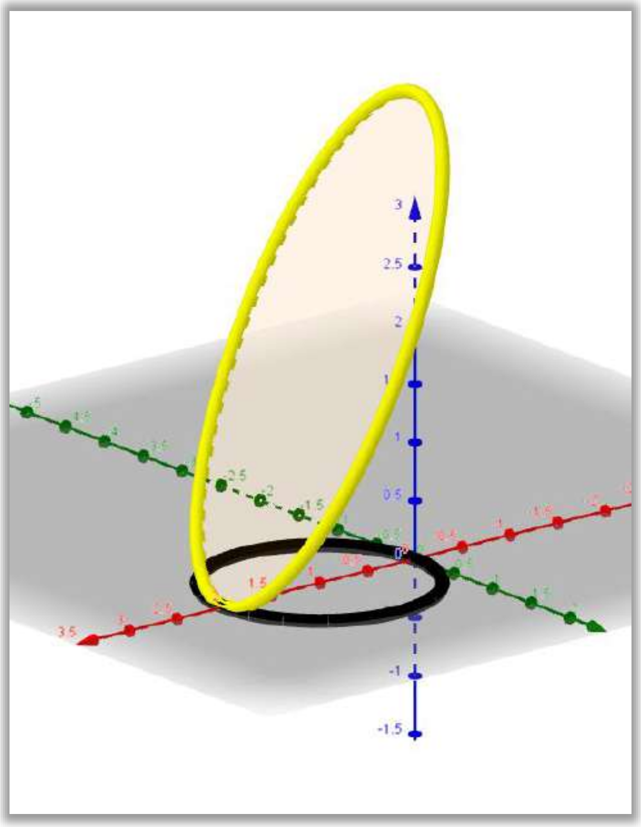

***Figura* 7**: La curva C_+ y la proyección sobre (x, y)

Inciso b) Bueno, con la curva de la que hablábamos en el inciso a) hay que resolver la integral curvilínea sobre el campo.

$$F(x,y,z) = \left(z \cdot f(x) - y\,;x - 3z\,;f^2(z)\right)$$

Por cuestiones obvias no vamos a hacer la curvilínea, y vamos a tratar de aplicar el teorema de Stokes.

Para Stokes necesito una curva ***simple***, ***cerrada***, y ***regular por tramos*** (como demostramos anteriormente) y una superficie ***orientable*** que contenga a la curva, y que a su vez, la curva sea ***borde*** de la superficie. Planteo el teorema.

$$\oint_{C^+} F = \iint_S Rot(F) \cdot \frac{N_S}{\|N_S\|}\, dS$$

Primero calculo el $Rot(F)$ y las normales de las superficies conocidas para ver que superficie debo elegir.

- $$Rot(F) = \left(R_y - Q_z; P_z - R_x; Q_x - P_y\right) \longrightarrow \begin{cases} R_y - Q_z = 3 \\ P_z - R_x = f(x) \\ Q_x - P_y = 2 \end{cases} \longrightarrow Rot(F) = (\,3\,;f(x)\,;2\,)$$

- $$Normales\text{:} \begin{cases} N_{S_1} = \pm(2x\,;2y\,;1) \\ N_{S_2} = \pm(2x - 4\,;2y\,;-1) \\ N_P = \pm(2\,;0\,;1) \end{cases}$$

Bien, ese $f(x)$ en el rotor mete un poco de miedo, pero, si utilizamos el plano como superficie, el producto escalar entre el $Rot(F)$ y la normal N_P lo hace "*desaparecer*".

Pero antes, hay que definir que normal usaremos. Como se ve en la figura 6, basta con aplicar la famosa regla de la mano derecha sobre el plano $z + 2x - 4 = 0$ y se deduce que la normal compatible con la curva (la cual definimos que se recorrerá en sentido antihorario (C_+)), será la la normal con la componente z positiva.

$$Normal\ compatible\ con\ la\ curva\ C_+ = (\,2\,;0\,;1\,)$$

También, otra manera de deducir que normal debemos utilizar es, aprovechando que es plana, aplicar.

$$C' \times C''$$

Para ello necesitamos parametrizar la curva tridimensional, no es muy difícil, ya que sabemos que sobre él (x,y) es una circunferencia de radio 1 desplazada en x (por inciso a)), podemos aseverar que, por lo menos en la componente x e y será:

$$C_{x,y}(t) = (\cos(t) + 1\,;\sin(t))$$

Ahora solo me queda despejar el z de la ecuación del plano y reemplazar x e y en ella.

$$z = 4 - 2x \quad \longrightarrow \quad C(t) = (\cos(t) + 1\,;\sin(t)\,;\ 2 - 2\cos(t))\ con\ t \in [0;2\pi]$$

Bien, a derivar se ha dicho.

$$\begin{matrix} C' = (-\sin(t)\,;\cos(t)\,;2\sin(t)) \\ C'' = (-\cos(t)\,;-\sin(t)\,;2\cos(t)) \end{matrix} \longrightarrow \quad C' \times C'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin(t) & \cos(t) & 2\sin(t) \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 2\cos(t) \end{vmatrix}$$

$$C' \times C'' = (\ 2(\cos^2(t) + \sin^2(t))\,; 2\cos(t)\sin(t) - 2\cos(t)\sin(t)\ \,; \sin^2(t) + \cos^2(t))$$

$$C' \times C'' = (\ 2\,;0\,;1\ )$$

Dio lo mismo que habíamos deducido antes, "*astonishing*" diría Ricardo. Este método de $C' \times C''$ solo se puede utilizar en los casos donde la curva es plana, y lo que nos da como resultado es la normal compatible con la curva, así de directo. El problema que surge es que a veces las derivadas quedan feas y ni te cuento el producto vectorial… pero bueno. Retomemos, realizo el producto escalar entre el $Rot(F)$ y N_P.

$$Rot(F) \cdot N_P = (3\,; f(x)\,; 2) \cdot (\ 2\,;0\,;1) = 8$$

Hermoso, queda definir al plano para que su único borde sea la curva C, y aplicarlo a la integral de superficie de Stokes.

$$S_P\colon z + 2x - 4 \quad \wedge \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$\oint_{C^+} F = \iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 1} 8\,dxdy \ = 8 \cdot \iint_{(x-1)^2+y^2 \leq 1} dxdy = 8 \cdot Area((x-1)^2 + y^2 \leq 1)$$

Ya que $Area((x-1)^2 + y^2 \leq 1)$ es una circunferencia de radio 1, el área que encierra dicha curva es igual a π. Listo, problema terminado.

$$\therefore \oint_{C^+} F = 8\pi$$

Problema 5.

Uuuuultimo punto del parcial. Anoto las superficies y los campos aquí abajo.

$$F_1(x,y,z) : (\ 2xz + x + 3y^7\,; 7x^5 + 6y - 9z^5\,; xy - z^2 - z\ )$$

$$F_2(x,y,z) : \left(\ x + yze^{\sin(z)}\,; y + e^{ez}\cos(x)\ \,; z + y^5\ \right)$$

$$S_1(u,v) : (\cos(u)\,;\sin(u)\,;v)\ donde\ (u,v) \in [0;2\pi] \times [-1;0]$$

$$S_2(u,v) : \left(u\,;v\,;c(1-u^2-v^2)\right)\ donde\ 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1\,, c > 0$$

Nos piden hallar un $c > 0$ (si es que existe) de manera tal que se cumpla.

$$\iint_{S_1} F_1 = \iint_{S_2} F_2$$

Básicamente lo que hay que hacer es calcular las dos integrales de superficie e igualarlas (lo que dice la igualdad de arriba). Empiezo por $\iint_{S_1} F_1$.

$$S_1(u,v) : (\cos(u)\,;\sin(u)\,;v) \longrightarrow Busco\ al\ implicita \ \longrightarrow\ x^2 + y^2 = 1$$

La superficie 1 es un cilindro, el cual está delimitado entre los planos $z = -1$ y $z = 0$. Ya que la integral de superficie es un poco difícil, trato de calcularla por el teorema de Gauss.

Para Gauss necesito un $Vol(V)$ *cerrado*. El cilindro NO está cerrado, solo delimitado, para ello planteo las tapas con sus normales salientes:

$$T_1 : z = 0\ \wedge x^2 + y^2 \le 1\ /\ N_{T_1} = (0;0;1)$$

$$T_2 : z = -1\ \wedge x^2 + y^2 \le 1\ /\ N_{T_2} = (0;0;-1)$$

Ahora SI tengo un $Vol(V)$ cerrado. Planteo Gauss no' ma'.

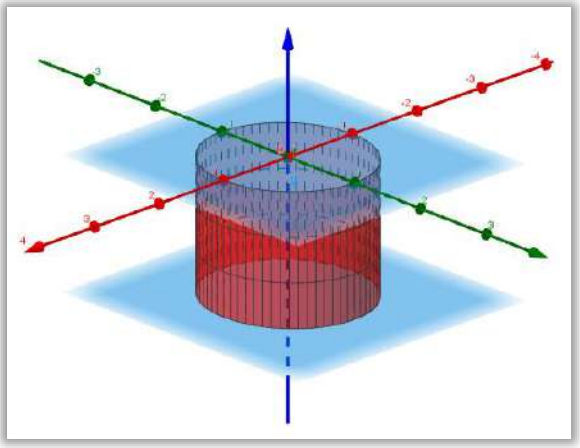

***Figura* 8**: El cilindro S_1 y los planos z = 0 y z = -1

$$\iint_{S_1} F_1 + \iint_{T_1} F_1 + \iint_{T_2} F_1 = \iiint_V Div(F_1)\, dV$$

Empezamos con la divergencia y la integral triple.

- $Div(F_1) = 2z + 1 + 6 - 2z - 1 = 6 \quad \longrightarrow \quad \iiint_V Div(F_1)\, dV = 6 \cdot Vol(V)$

El volumen V sale por formula, sabiendo que el volumen genérico de un cilindro es $\pi r^2 h$ queda.

$$\iint_{S_1} F_1 + \iint_{T_1} F_1 + \iint_{T_2} F_1 = 6 \cdot Vol(V) = 6\pi$$

Vamos con las integrales de las tapas.

- $\iint_{T_1} F_1 : \quad \iint_{x^2+y\text{^}2\le 1} (x + 3y^7\,; 7x^5 + 6y\,; xy) \cdot (0\,;0\,;1)\, dxdy \ = \ \iint_{x^2+y^2\le 1} xy\ dxdy$

$$Paso\ a\ polares: \quad \begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix} \wedge \left|\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}\right| = r$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos(\theta)\sin(\theta)\ drd\theta = \left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\cdot\left(\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)\ d\theta}_{=\mathbf{0}}\right) = 0$$

- $$\iint_{T_2} F_1 : \iint_{x^2+y^2\le 1} (-x+3y^7\,;7x^5+6y+9;xy)\cdot(0\,;0\,;-1)\,dxdy = -\underbrace{\iint_{x^2+y^2\le 1} xy\,dxdy}_{=\iint_{T_1} F}$$

$$\iint_{T_2} F_1 = -\iint_{T_1} F_1 = 0 \longrightarrow \iint_{S_1} F_1 = 6\pi$$

Bien, ya tenemos una parte de la igualdad. Queda hacer la integral de superficie sobre S_2 en el campo F_2 .

$$6\pi = \iint_{S_2} F_2$$

Ya que, nuevamente la integral de superficie es muy difícil (ni siquiera sé si sale), intentamos plantear el teorema de Gauss. Primero trato de encontrar su implícita para por lo menos imaginarme la superficie.

$$S_2(u,v) : \left(u\,;v\,;c(1-u^2-v^2)\right) \longrightarrow -(x^2+y^2) = \frac{z}{c} - 1 \quad \begin{matrix} Paraboloide \\ concavo\ hacia\ abajo \end{matrix}$$

Guiándonos por los extremos de la superficie, el termino $0 \le u^2+v^2 \le 1$ nos indica que los puntos pertenecientes a la superficie son los que cumplen que $u^2+v^2 \le 1$. Esto se cumple si y solo si tomamos los puntos por encima del plano $z = 0$. Por otra parte, el término $c > 0$ nos está diciendo que el paraboloide nunca cambiara de concavidad, siempre permanecerá cóncavo hacia abajo. También se puede notar que el punto c es la "punta" del paraboloide, de donde nace.

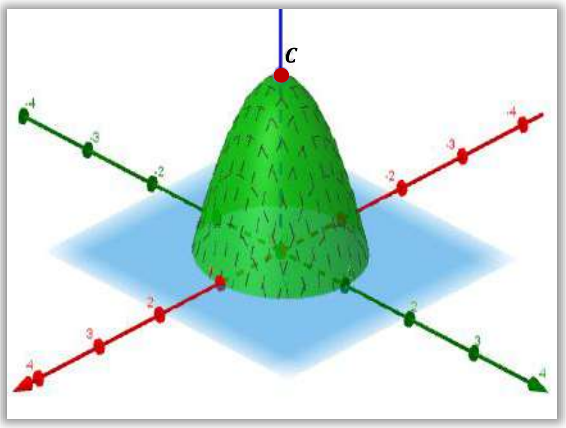

***Figura* 9**: El paraboloide S_2 y el plano z = 0

Concluyendo este análisis, el paraboloide no encierra un $Vol(V)$, solamente está delimitado con el plano $z = 0$, para ello planteo una superficie que tape el paraboloide y su normal saliente.

$$T_3 : z = 0\ \wedge x^2+y^2 \le 1\ /\ N_{T_3} = (0;0;-1)$$

Ahora que tengo un $Vol(V)$ cerrado, planteo Gauss.

$$\iint_{S_2} F_2 + \iint_{T_3} F_2 = \iiint_V Div(F_2)\, dV$$

Lo mismo de siempre, empiezo con la divergencia.

- $Div(F_2) = 1 + 1 + 1 = 3$

Precioso, vamos con la integral de superficie sobre T_3.

- $\displaystyle\iint_{T_3} F_2 : \iint_{x^2+y^2\leq 1} (\, x \,; y + \cos(x)\,; y^5\,) \cdot (\,0\,;0\,;\,-1\,)\, dxdy \;=\; \iint_{x^2+y^2\leq 1} -y^5\, dxdy$

$$Paso\ a\ polares: \begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \wedge \left|\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}\right| = r$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^6 \sin^5(\theta)\; drd\theta \;= -\left(\int_0^1 r^6\, dr\right)\cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin^5(\theta)\; d\theta\right)}_{=\mathbf{0}} \;=\; 0$$

Recaudando todos los resultados, la igualdad planteada en la consigna quedaría.

$$Si: \iint_{S_1} F_1 = 6\pi \quad \wedge \quad \iint_{S_2} F_2 = 3 \cdot Vol(V)$$

$$6\pi = 3 \cdot Vol(V)$$

Planteo el volumen con los extremos dados en consigna.

$$Extremos\ de\ integración: \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq c(1 - x^2 - y^2) \end{matrix} \longrightarrow \int_{x^2+y^2\leq 1} \int_0^{c(1-x^2-y^2)} dzdydx$$

$$\int_{x^2+y^2\leq 1} c(1 - x^2 - y^2)\, dxdy \;=\; c \cdot \int_{x^2+y^2\leq 1} (1 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

$$Paso\ a\ polares: \begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \wedge \left|\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}\right| = r$$

$$c \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)\, r\, drd\theta \;=\; c \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^1 r - r^3\, drd\theta$$

$$c\cdot\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}_{=\boldsymbol{2\pi}}\cdot\left(\underbrace{\int_0^1 r\,dr}_{=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} - \underbrace{\int_0^1 r^3\,dr}_{=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot c \longrightarrow Vol(V)$$

Entonces, para finalizar este bello problema.

$$Para\ que \iint_{S_1} F_1 = \iint_{S_2} F_2 \iff 6\pi = 3\cdot Vol(V) = 3\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot c\right) = \frac{3}{2}\pi\cdot c$$

$$\therefore c = 4$$

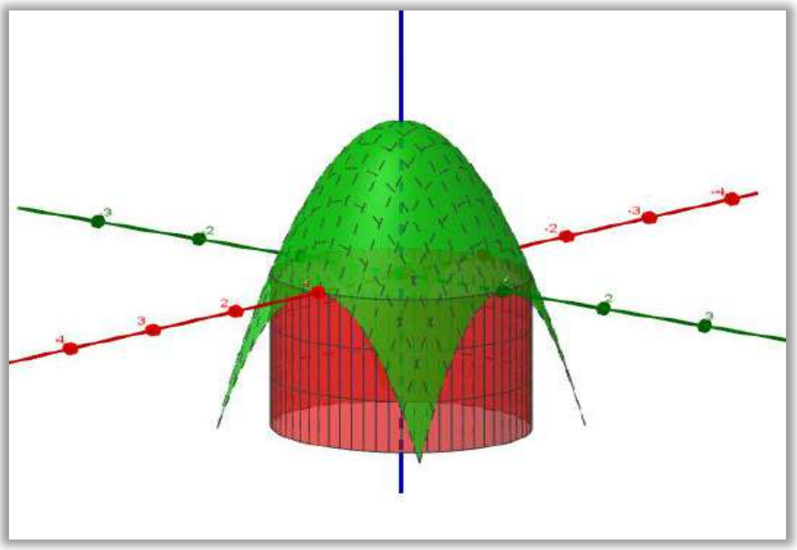

***Figura* 10**: El cilindro S_1y el paraboloide S_2

Fin.

Resuelto por Nahuel Passano
E-mail: n.passano@hotmail.com
Diciembre 2017