Analisis Matematico 2- INGENIERIA - Examen Final - 21 de Julio de 2016.

NOMBRE..Comisión................................

Problema 1. (30) Dadas las funciónes $f_1 : D_1 \subseteq R^2 \longrightarrow R$, $f_2 : D_2 \subseteq R^2 \longrightarrow R$ cuyas expresiones respectivas son

$$f_1(x,y) = \frac{x^4y^4}{x-y} \qquad f_2(x,y) = \frac{x^4y}{x^4 - x^2y + y^2} \tag{1}$$

a) Hallar de manera explícita el conjunto $D_1 = dom(f_1)$, $D_2 = dom(f_2)$ para cada una de las funciones f_1 y f_2 $D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$, $D_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Analizar si las funciones f_1, f_2 dadas en (1) se pueden extender a todo R^2 de manera tal que resulten diferenciables en todo R^2. f_1 NO , f_2 SÍ.

....

Problema 2(20)

Dada la función $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$ tal que $F(1,1) = 1$, $F'(1,1) = [\,-1 \quad 4\,]$ Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z = G(x,y)$ en el punto $p = (1,1)$ siendo

$$G(x,y) = F^2(y,y) + \ln(F(y,x))$$

$z = 4x + 5y - 8$

....

Problema 3. (20) Calcular el volumen (finito) del sólido $V \subset \mathbf{R}^3$ que definido por

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x - 2z \geqslant 0 \ \wedge \ (x-z)^2 + y^2 - z \leqslant 0\right\}$$

$\frac{1}{32}\pi$

....

Problema 4. (10) Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\check{\mathbf{I}} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\check{\mathbf{J}} + z\check{\mathbf{K}}$$

y la curva C cuya parametrización es

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t\ ,\ \sin t\ ,\ 2\cos t + 1) \ \text{ con } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Calcular la integral curvilinea

$$\int_{C^+} \mathbf{F}$$

2π

....

Problema 5. (20) Dados los siguientes campos vectoriales

$$\mathbf{F}_1(x,y,z) = \left(ze^{-x^2}\ ,\ -\tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{2}x^2\ ,\ \sin(z^2)\right)$$

$$\mathbf{F}_2(x,y,z) = z^2\check{\mathbf{I}} + (xy)\check{\mathbf{J}} - xz\check{\mathbf{K}}\ ,$$

calcular las siguientes integrales

i) $\displaystyle\int_{C^+} \mathbf{F}_1$ donde $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x - 2z = 0 \ \wedge \ (x-z)^2 + y^2 - z = 0\right\}$ $\frac{3}{8}\pi$

ii) $\displaystyle\int_{S^+} \mathbf{F}_2$ donde $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \ \wedge \ x^2 + z^2 \leqslant 1\}$ 0

Resuelto

Problema 1. a) Como

$$f_1(x,y)=\frac{x^4y^4}{x-y},\qquad f_2(x,y)=\frac{x^4y}{x^4-x^2y+y^2}$$

son cocientes de polinomios, determinaremos sus respectivos dominios a partir de los complementos. El procedimiento es conveniente y sencillo, pues dichos complementos coinciden con todos los puntos del plano $\mathbf{R}^2$ que hacen cero a los denominadores.

<u>Para f_1:</u>

$$x-y=0 \iff y=x \qquad \therefore D_1^{\complement}=\big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y=x\big\}=\{(t,t):t\in\mathbf{R}\}$$

<u>Para f_2:</u>

$$\begin{aligned} x^4-x^2y+y^2&=0 & & \\ \left(x^2-\tfrac{1}{2}y\right)^2+\tfrac{3}{4}y^2&=0 & \iff \qquad & x^2-\tfrac{1}{2}y=0\wedge y=0 \\ & & & x=y=0 \end{aligned}$$

luego $D_2^{\complement}=\{(0,0)\}$.

Conclusión:

$$\begin{aligned} D_1&=\mathbf{R}^2\setminus\{(a,a):a\in\mathbf{R}\}\\ D_2&=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\end{aligned}$$

b) Todo cociente de polinomios unívocamente determinado en un abierto es diferenciable en este, si los puntos pertenecientes a dicho abierto son tales que el denominador del cociente no se anula.

Analizaremos a continuación si es posible realizar una *extensión continua* de cada función en los puntos pertenecientes al complemento del dominio.

Extensión continua

<u>Para f_1:</u>

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to a}} f_1(x,y)=\begin{cases}\infty & \text{si } a\neq 0\\ \frac{0}{0}? & \text{si } a=0\end{cases}$$

queda por analizar el caso $a=0$, eso hacemos.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_1(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left\{\frac{x^4y^4}{x-y}\right\}$$

De existir el límite, tendría que existir el curvilíneo sobre cualquier trayectoria infinitesimal con tendencia al $(0,0)$, contenida en D_1.

Esto no sucede así: basta escoger $C(k) = D_1 \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x = y + ky^8\}$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \operatorname{curv}_{C(k)} f_1(x,y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ (x,y)\in C(k)}} f_1(x,y) = \lim_{y\to 0} f_1\left(y+ky^8, y\right) = \frac{1}{k}.$$

Les recomiendo hacer la cuenta para que no queden dudas. Como sugerencia, primero calculen con tranquilidad la composición para todo $y \neq 0$,

$$f_1\left(y+ky^8, y\right) = \frac{1+ky^7}{k}$$

se ve entonces que, cuando $y \longrightarrow 0$, se obtiene la tendencia a $\frac{1}{k}$. Evidentemente el límite doble no existe, pues para cada curva $C(k)$ elegida el valor del límite cambia. Luego

$$\nexists \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_1(x,y) \Longrightarrow f_1 \text{ es discontinua en } (0,0)$$

pero además vimos que

$$\forall a \neq 0,\ \lim_{\substack{x\to a\\ y\to a}} f_1(x,y) = \infty \Longrightarrow f_1 \text{ es discontinua en } (a,a).$$

Como la implicación es *para todos* los valores de a, f es discotinua sobre todos los puntos de la recta. La discontinuidad, aunque de otra especie, también aparece en el origen, en virtud de la implicación anterior.

$$\therefore f_1 \text{ es discontinua en } D_1^{\complement}.$$

CONCLUSIÓN: como es imposible extender f_1 de manera continua sobre $D_1^{\complement}$, se concluye que tampoco puede ser extendida de manera que resulte diferenciable en $D_1^{\complement}$.

Para f_2: Analizamos la continuidad de la función en $D_2^{\complement}$. Planteamos

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_2(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left\{ \frac{x^4 y}{x^4 - x^2 y + y^2} \right\}$$

Déjenme decirles que el límite existe y da cero. Las pistas reunidas hasta ahora para sospecharlo son las dos siguientes:

1. El complemento del dominio $D_2^{\complement} = \{(0,0)\}$ está formado por un *único punto aislado*. Obsérvese que este no era el caso de la función anterior, que estaba indefinida sobre toda una recta $D_1^{\complement} = \{(t,t) : t \in \mathbf{R}\}$.
2. El grado del numerador $\operatorname{gr}(x^4 y) = 4 + 1 = 5$ es mayor que el grado del denominador $\operatorname{gr}(x^4 - x^2 y + y^2) = \max\{4, 2+1, 2\} = 4$.

Con esto, reunimos todas las *sospechas* de que la función es continua, pero nada podemos afirmar a menos que tengamos una *prueba* de ello. Hay muchas maneras de hacerlo.

Una de ellas es la típica "cero por acotada", que se basa en acotar la función auxiliar siguiente.

$$g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 - x^2 y + y^2}$$

Si logramos acotar g, es muy fácil aplicar el teorema de "cero por acotada" porque f puede descomponerse en tal producto $f_2(x,y) = (x^2) \cdot g(x,y)$.

Hay muchas maneras de acotar g, a mí se me ocurrieron varias.

Va la **primer acotación** (algo críptica, pero no por ello menos creativa):

$$\begin{aligned} &0 \leq \left(x^2 - |y|\right)^2 \\ &0 \leq x^4 - 2x^2|y| + y^2 \\ &0 \leq x^4 - x^2\left(|y| + |y|\right) + y^2 \end{aligned}$$

como $|y| \geq y$ entonces $|y| + |y| \geq y + |y|$, multiplicando miembro a miembro por -1 se tiene $-\left(|y| + |y|\right) \leq -\left(y + |y|\right)$. Luego por transitividad,

$$\begin{aligned} 0 \leq x^4 - x^2\left(|y| + |y|\right) + y^2 &\leq x^4 - x^2\left(y + |y|\right) + y^2 \\ 0 \leq \qquad\qquad &\qquad x^4 - x^2 y - x^2|y| + y^2 \\ x^2|y| \leq x^4 - x^2 y + y^2 \end{aligned}$$

donde se sumó miembro a miembro $x^2|y|$. Como

$$x^4 - x^2 y + y^2 = \left(x^2 - \tfrac{1}{2}y\right)^2 + \tfrac{3}{4}y^2 \geq 0$$

entonces puede dividirse miembro a miembro por esta cantidad, sin alterar el signo de la desigualdad. En virtud de las propiedades del valor absoluto:

$$\frac{x^2|y|}{x^4 - x^2 y + y^2} \leq 1 \iff \left|\frac{x^2 y}{x^4 - x^2 y + y^2}\right| \leq 1$$

que equivale a afirmar $|g(x,y)| \leq 1$, luego g es acotada.

Para la **segunda forma** recurrimos al cálculo de las *curvas de nivel* de la función g. Recordemos la definición, las curvas de nivel c son todos los puntos en el dominio de g tales que $g(x,y) = c$. Dicho esto, planteamos

$$\begin{aligned} g(x,y) &= c \\ \frac{x^2 y}{x^4 - x^2 y + y^2} &= c \end{aligned}$$

Si $c = 0$, no nos sirve porque nos queda $x = 0$ o bien $y = 0$, se trata de los ejes. Hasta ahora, eso nos dice que la función pasa por cero en todos esos puntos, cosa bastante obvia e inútil, pues sabemos que siendo g no constantemente nula, ha de tomar valores no nulos fuera del conjunto de nivel $c = 0$.

El caso de interés resulta ser por lo tanto $c \neq 0$, para estos valores podemos manipular la ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{c} x^2 y &= x^4 - x^2 y + y^2 \\ 0 &= x^4 - \left(1 + \tfrac{1}{c}\right) x^2 y + y^2 \end{aligned}$$

Las curvas de nivel quedan definidas sólo para *algunos* valores de c, se trata de todos aquellos que satisfacen la ecuación cuadrática precedente.

Para encontrar dichos valores existen diversas maneras, por ejemplo si llamamos $t = x^2$ podemos reordenar la ecuación anterior así:

$$t^2 - \left[\left(1 + \tfrac{1}{c}\right) y\right] t + \left[y^2\right] = 0$$

¡o sea que es una cuadrática en t! La ecuación cuadrática tiene solución si y sólo si su discriminante $\Delta \geq 0$, ojo que acá los coeficientes de la cuadrática (los corchetes) dependen de y. Entonces

$$\Delta = \left[\left(1 + \tfrac{1}{c}\right) y\right]^2 - 4\left[y^2\right] = \left[\left(1 + \tfrac{1}{c}\right)^2 - 4\right] y^2 = \left(\tfrac{1}{c} - 1\right)\left(\tfrac{1}{c} + 3\right) y^2$$

como de por sí $y^2 \geq 0$, entonces el signo de Δ depende pura y exclusivamente de los paréntesis que, a su vez, dependen de c.

Hay dos casos posibles.

1. $\underline{c > 0}$: en este caso, el segundo paréntesis es *positivo* y todo depende del primero (tiene que ser positivo también, claramente).

   $$\tfrac{1}{c} - 1 \geq 0 \iff \tfrac{1}{c} \geq 1 \iff 1 \geq c$$

   ojito acá que el signo se mantiene al multiplicar miembro a miembro por c, sólo porque c es *positivo*. Esto no ocurre en el siguiente caso.

2. $\underline{c < 0}$: el primer paréntesis es *negativo* y todo depende del segundo.

$$\tfrac{1}{c} + 3 \leq 0 \iff \tfrac{1}{c} \leq -3 \iff 1 \geq -3c \iff -\tfrac{1}{3} \leq c$$

Revisen los cambios de signo hasta comprenderlos enteramente... no vayan a pifiarla en algo así, tan simple y elemental.

Cuestión que obtuvimos $-\frac{1}{3} \leq c \leq 1$, lo cual quiere decir que

$$\forall (x, y) \in D_2, -\tfrac{1}{3} \leq g(x, y) \leq 1, \quad \therefore g \text{ es acotada.}$$

La **tercera forma** consiste en hallar las cotas $-\frac{1}{3}$ y 1 acudiendo sólo a las desigualdades, de la siguiente manera.

Cota inferior de g.

$$0 \leq \left(x^2 + y\right)^2 = x^4 + 2x^2y + y^2 = \left(x^4 - x^2y + y^2\right) + 3x^2y$$

restamos y dividimos, considerando de la misma manera que antes, que $x^4 - x^2y + y^2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$, luego

$$\begin{aligned} -3x^2y &\leq x^4 - x^2y + y^2 \\ \frac{-3x^2y}{x^4 - x^2y + y^2} &\leq 1 \\ \frac{x^2y}{x^4 - x^2y + y^2} &\geq -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

obtuvimos $g(x, y) \geq -\frac{1}{3}$.

Cota superior de g.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(x^2 - y\right)^2 = x^4 - 2x^2y + y^2 = \left(x^4 - x^2y + y^2\right) - x^2y \\ x^2y &\leq x^4 - x^2y + y^2 \\ \frac{x^2y}{x^4 - x^2y + y^2} &\leq 1 \\ g(x, y) &\leq 1. \end{aligned}$$

Obtuvimos, de igual manera que antes, que g es acotada, explícitamente la acotación queda $-\frac{1}{3} \leq g(x, y) \leq 1$.

Como **cuarta forma** podríamos considerar la reducción del denominador de g a una suma positiva:

$$0 \le \left(x^2 - y\right)^2 = x^4 - 2x^2y + y^2 = 2x^4 - x^4 - 2x^2y + 2y^2 - y^2 =$$
$$= 2\left(x^4 - x^2y + y^2\right) - \left(x^4 + y^2\right)$$

de donde se obtiene la desigualdad $x^4 - x^2y + y^2 \ge \frac{1}{2}\left(x^4 + y^2\right)$. Como esta cantidad está en un denominador, al invertir, la desigualdad queda

$$0 \le |g(x,y)| = \frac{x^2|y|}{x^4 - x^2y + y^2} \le \frac{x^2|y|}{\frac{1}{2}\left(x^4 + y^2\right)} = \frac{2x^2|y|}{x^4 + y^2}$$

y el último cociente es bastante fácil de acotar:

$$0 \le \left(x^2 - |y|\right)^2 = x^4 - 2x^2|y| + y^2 \iff \frac{2x^2|y|}{x^4 + y^2} \le 1$$

y listo, $|g(x,y)| \le 1$ por transitividad. ¡Queda como la primera forma!

Otras formas: ya se les ocurrirán a ustedes. Acá sólo les di algunas ideas.

Conclusión: por donde se lo mire, la función $f_2(x,y) = x^2 g(x,y)$ tiene una *extensión continua* en el origen, pues siendo g acotada,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_2(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left\{x^2 g(x,y)\right\} = 0$$

porque $x^2 \longrightarrow 0$ cuando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$. Basta con *redefinir* $f_2(0,0) = 0$ para que la función resulte continua en $(0,0)$. Esto es recién la continuidad, aunque para la diferenciabilidad el razonamiento será similar.

Derivadas de f_2.

Calculamos $f_2(x,0) = f_2(0,y) = 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, además redefinimos $f_2(0,0) = 0$ con lo cual

$$\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f_2(x,0) - f_2(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \frac{f_2(0,y) - f_2(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

La ecuación del plano tangente a la función f_2 en el punto $O = (0,0)$ es

$$T_{[f_2,O]}(x,y) = f_2'(0,0)\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix} + f_2(0,0) = 0$$

Con lo cual el resto queda $\phi_{[f_2,O]}(x,y) = f_2(x,y) - T_{[f_2,O]}(x,y) = f_2(x,y)$. Entonces f_2 es diferenciable en O si y sólo si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\phi_{[f_2,O]}(x,y)}{\|(x-0,y-0)\|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f_2(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

Es (relativamente) fácil ver que esto ocurre:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\phi_{[f_2,O]}(x,y)}{\|(x-0,y-0)\|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left\{ x \cdot \frac{x}{\|(x,y)\|} \cdot g(x,y) \right\} = 0$$

pues $x \to 0$, g es acotada y

$$y^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \geq x^2 \iff \|(x,y)\| \geq |x| \iff 1 \geq \left| \frac{x}{\|(x,y)\|} \right|$$

pues $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Finalmente, la extensión $f_2(0,0)$ hace que f_2 sea *diferenciable* en el origen, y por lo tanto en todo $\mathbf{R}^2$, por tratarse de un cociente de polinomios con denominador no nulo en el abierto $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Problema 2. Copio los datos así no tienen que volver a buscarlos en la primer hoja.

$$F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}, \; F(1,1) = 1, \; F'(1,1) = [-1 \;\, 4],$$
$$G(x,y) = F^2(y,y) + \ln\Big(F(y,x)\Big)$$

donde claramente $\mathbf{R}_{>0} = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ (digo *claramente* porque, de otra manera, no podría estar definido el logaritmo natural de F). Se pide la ecuación del plano tangente a la gráfica de G en el punto $p = (1,1)$:

$$T_{[G,p]}(\mathbf{r}) = G'(p)\,(\mathbf{r} - p) + G(p)$$

donde se denota a los vectores por sus transpuestos

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuestión que necesitamos $G(p)$ y $G'(p)$. El primero es fácil:

$$G(p) = G(1,1) = F^2(1,1) + \ln\Big(F(1,1)\Big) = 1 + \ln(1) = 1$$

con lo cual

$$T_{[G,p]}(\mathbf{r}) = G'(p)\,(\mathbf{r}-p) + 1$$

Para la derivada cada uno tiene su método. Voy a tratar de cubrirlos todos, para que no queden dudas.

Podríamos considerar como **primer método** de derivación la “detección” de las composiciones que permiten obtener G a partir de (x, y).

$$G(x,y) = \underbrace{[\ \underbrace{F(\underbrace{y}_{t}, \underbrace{y}_{u})}_{\alpha}\ ]^2 + \ln\Big(\underbrace{F(\underbrace{y}_{v}, \underbrace{x}_{w})}_{\beta}\Big)}_{z}$$

Con esto, llamamos

$$\begin{aligned}
&f_1 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4, && f_1(x,y) = (y,y,y,x) = (t,u,v,w)\\
&f_2 : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}\times\mathbf{R}_{>0}, && f_2(t,u,v,w) = \Big(F(t,u), F(v,w)\Big) = (\alpha,\beta)\\
&f_3 : \mathbf{R}\times\mathbf{R}_{>0} \longrightarrow \mathbf{R}, && f_3(\alpha,\beta) = \alpha^2 + \ln\beta = z \longleftarrow \text{esto sería } G(x,y)
\end{aligned}$$

Con lo cual $G(x, y) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x, y)$, entonces queda formada la siguiente “cadena”

$$(x,y) \xmapsto{f_1} (t,u,v,w) \xmapsto{f_2} (\alpha,\beta) \xmapsto{f_3} z$$

al sustituir $(x, y) = p = (1, 1)$ la cadena de valores queda

$$(1,1) \xmapsto{f_1} (1,1,1,1) \xmapsto{f_2} (1,1) \xmapsto{f_3} 1$$

de manera que se comprueba lo obtenido anteriormente.

Derivamos la expresión $G(x, y) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x, y)$

$$\begin{aligned}
G'(x,y) &= f_3'(\alpha,\beta) f_2'(t,u,v,w) f_1'(x,y) =\\
&= \begin{bmatrix} z_\alpha & z_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_t & \alpha_u & \alpha_v & \alpha_w \\ \beta_t & \beta_u & \beta_v & \beta_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x & t_y \\ u_x & u_y \\ v_x & u_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Recordatorio para construir la matriz derivada: a cada columna le corresponde una variable, y a cada fila, una función coordenada.

Seguimos. Calculamos las derivadas parciales necesarias.

$$\begin{aligned} z_\alpha &= \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} = 2\alpha \\ z_\beta &= \frac{\partial f_3}{\partial \beta} = \beta^{-1} \\ \alpha_t &= F_t(t,u) \\ \alpha_u &= F_u(t,u) \\ \alpha_v = \alpha_w &= 0 \\ \beta_t = \beta_u &= 0 \\ \beta_v &= F_v(v,w) \\ \beta_w &= F_w(v,w) \\ t_x = u_x = v_x &= 0 \\ w_x &= 1 \\ t_y = u_y = v_y &= 1 \\ w_y &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo se tiene

$$G'(x,y) = \begin{bmatrix} 2\alpha & \beta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_t(t,u) & F_u(t,u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_v(v,w) & F_w(v,w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\alpha & \beta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & F_t(t,u) + F_u(t,u) \\ F_w(v,w) & F_v(v,w) \end{bmatrix}$$

ahora reemplazamos los datos. En principio $p = (1,1)$, lo demás se deduce de la "cadena", y del hecho que

$$\begin{aligned} F'(t,u) &= \begin{bmatrix} F_t(t,u) & F_u(t,u) \end{bmatrix} \\ F'(v,w) &= \begin{bmatrix} F_v(v,w) & F_w(v,w) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con lo cual

$$G'(p) = G'(1,1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & F_t(1,1) + F_u(1,1) \\ F_w(1,1) & F_v(1,1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 + 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$T_{[G,p]}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} (\mathbf{r} - p) + 1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{bmatrix} + 1 = 4x + 5y - 8.$$

Como **segunda forma** de resolver el ejercicio, podemos considerar las derivadas parciales. Por supuesto que se trata de lo mismo que antes, sólo que se obtienen automáticamente los productos matriciales desarrollados.

En principio, las designaciones son las mismas:

$$G(x,y) = [\ \underbrace{F(\underbrace{y}_{t},\underbrace{y}_{u})}_{\alpha}\ ]^2 + \ln\left(\underbrace{F(\underbrace{y}_{v},\underbrace{x}_{w})}_{\beta}\right)$$

Con lo cual $G = \alpha^2 + \ln\beta$ y queda

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial \beta}{\partial y}$$

pero

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial u}$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial w}$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial v}$$

con lo cual

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{1}{F(v,w)}\frac{\partial F}{\partial w}$$
$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial u}\right) + \frac{1}{\beta}\frac{\partial F}{\partial v} = 2F(t,u)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial u}\right) + \frac{1}{F(v,w)}\frac{\partial F}{\partial v}$$

acá vemos la enorme ventaja de trabajar con matrices... las expresiones son mucho más compactas y sencillas. Cuestión que, al sustituir los datos, obtenemos lo mismo:

$$(x,y) = p = (1,1) \longmapsto (t,u,v,w) = (1,1,1,1)$$

$$\frac{\partial G(1,1)}{\partial x} = \frac{1}{F(1,1)}\frac{\partial F(1,1)}{\partial w} = \frac{1}{1}\cdot 4 = 4$$
$$\frac{\partial G(1,1)}{\partial y} = 2F(1,1)\left(\frac{\partial F(1,1)}{\partial t} + \frac{\partial F(1,1)}{\partial u}\right) + \frac{1}{F(1,1)}\frac{\partial F(1,1)}{\partial v} =$$
$$= 2\cdot 1\cdot(-1+4) + \frac{1}{1}\cdot(-1) = 6 - 1 = 5$$

con lo cual otra vez

$$T_{[G,p]}(x,y) = \frac{\partial G(1,1)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial G(1,1)}{\partial y}(y-1) + 1 = 4x + 5y - 8.$$

¡¡¡no podía dar otra cosa!!!

Como **tercer manera**, podemos intentar derivar “a lo bestia” y ver qué sale. Recordemos:

$$G(x,y) = F^2(y,y) + \ln\Big(F(y,x)\Big)$$

al derivar, se tiene

$$G'(x,y) = 2F(y,y)F'(y,y)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{F'(y,x)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}{F(y,x)}$$

sustitúyase $x = y = 1$:

$$\begin{aligned}
G'(p) = G'(1,1) = 2F(1,1)F'(1,1)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{F'(1,1)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}{F(1,1)} &= \\
= 2\cdot 1\cdot \begin{bmatrix}-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix}-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}{1} &= \\
= 2\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & -1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$T_{[G,p]}(x,y) = G'(p)\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right) + 1 = \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-1\\ y-1\end{bmatrix} + 1 = 4x + 5y - 8.$$

Más allá del método utilizado, la respuesta es la misma en todos los casos. Este hecho, de alguna manera, es como una verificación “interna” de los métodos empleados.

Respuesta: la ecuación del plano tangente a la gráfica de G en el punto $p = (1,1)$ es

$$z = 4x + 5y - 8.$$

Problema 3. Se pide calcular el volumen del sólido V. Copio la expresión del sólido:

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - 2z \geq 0 \land (x - z)^2 + y^2 - z \leq 0 \right\}$$

(había un error en el signo de la desigualdad, ojo si copian la consigna de otro lado). Para tratar de entender cómo se ve en el espacio, lo más conveniente es rototrasladarlo primero y analizarlo una vez transformado.

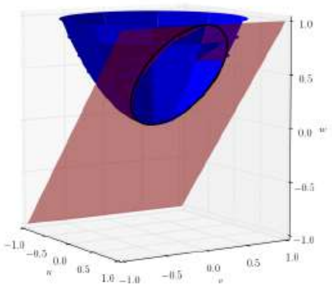
$$T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3,\ T(u, v, w) = (u + w, v, w)$$

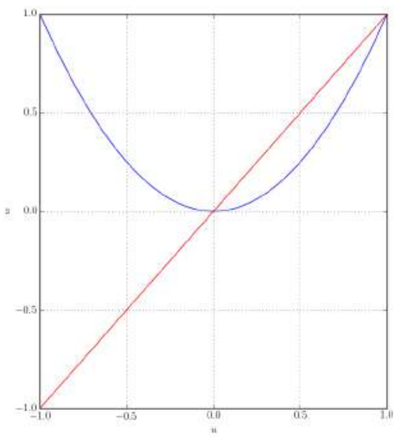
(la transformación se deduce al plantear $u = x - z,\ v = y,\ w = z$ es decir, definiendo T a partir de su inversa T^{-1}).

Queda

$$\begin{aligned} T^{-1}(V) &= \left\{ (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u - w \geq 0 \land u^2 + v^2 - w \leq 0 \right\} = \\ &= \left\{ (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u^2 + v^2 \leq w \leq u \right\} \end{aligned}$$

El sólido puede verse como el interior de un paraboloide, con un hueco en la parte superior, tapado por un plano inclinado.





El dibujito lo muestra bastante bien.

Para plantear la integral, calculamos el jacopastorius... perdón ese es el músico, quise escribir *jacobiano*... ustedes me entienden:

$$T'(u, v, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det[T'(u, v, w)] = 1$$

en este caso, la transformación *no afecta* el resultado. Nótese que

$$u^2 + v^2 \leq w \leq u \Longrightarrow u^2 + v^2 \leq u$$

es la región de integración, entonces como $u^2 + v^2 \leq w \leq u$, el integrando es $u - u^2 - v^2$ (techo menos piso), queda:

$$\operatorname{vol}(V) = \iiint_V dV = \iint_{\{u^2+v^2 \leq u\}} \left(u - u^2 - v^2\right) du\, dv$$

Notar que la región de integración y el integrando son prácticamente el mismo. El cambio más conveniente se trata, ni más ni menos, que de las coordenadas polares, como siempre, pues aparece una $\|(u, v)\|$ por ahí, dando vueltas... pero ojo, completando cuadrados se ve que

$$u - u^2 - v^2 = \tfrac{1}{4} - \left(u - \tfrac{1}{2}\right)^2 - v^2 = \tfrac{1}{4} - \left\|\left(u - \tfrac{1}{2}, v\right)\right\|^2$$

así que en realidad, conviene *trasladar* antes de transformar a polares.

$$\begin{cases} u - \frac{1}{2} = \rho \cos\theta \\ \quad v = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \text{con } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ queda } u - u^2 - v^2 = \tfrac{1}{4} - \rho^2.$$

Sucede de igual manera con la región, pues la desigualdad equivale a

$$u^2 + v^2 \leq u \iff 0 \leq u - u^2 - v^2 = \tfrac{1}{4} - \rho^2 \Longrightarrow 0 < \rho \leq \tfrac{1}{2}.$$

recordemos que tiene que ser $\rho > 0$ para que la transformación definida sea biyectiva). Como bien sabemos, $dA = du\, dv = \rho\, d\rho\, d\theta$ entonces queda

$$\operatorname{vol}(V) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{4} - \rho^2\right) \rho\, d\rho\, d\theta = \pi \int_0^{\frac{1}{4}} t\, dt = \pi \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{32}\pi.$$

Ese es el volumen pedido.

Como **forma alternativa**, podríamos haber propuesto de un saque la siguiente transformación:

$$T : \underbrace{(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbf{R}}_{D} \longrightarrow \mathbf{R}^3,\ T(\rho, \theta, \omega) = \left(\tfrac{1}{2} + \rho\cos\theta + \omega, \rho \operatorname{sen}\theta, \omega\right)$$

con lo cual

$$T^{-1}(V) = \left\{(\rho, \theta, \omega) \in D : \rho^2 + \rho\cos\theta + \tfrac{1}{4} \leq \omega \leq \tfrac{1}{2} + \rho\cos\theta\right\}$$

(para hallar este conjunto, sustitúyanse $(x, y, z) = T(\rho, \theta, \omega)$ en las expresiones del sólido V). De la última desigualdad se deduce

$$\rho^2 + \rho\cos\theta + \tfrac{1}{4} \leq \tfrac{1}{2} + \rho\cos\theta \Longrightarrow 0 < \rho \leq \tfrac{1}{2}$$

pues ya sabemos que $\rho \in (0, +\infty)$.

El determinante jacobiano es

$$\det[T'(\rho, \theta, \omega)] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 1 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

con lo cual $dV = dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,d\omega$, por Fubini podemos intercambiar el orden de integración, queda

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(V) = \iiint\limits_V dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\rho^2+\rho\cos\theta+\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}+\rho\cos\theta} \rho\,d\omega\,d\rho\,d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{4} - \rho^2\right)\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{32}\pi. \end{aligned}$$

Por ahora se me ocurren sólo esas dos maneras, que prácticamente son la misma: en una, tomamos dos transformaciones por separado, y en la otra acudimos directamente a la *composición* de ambas, derecho viejo. ¿Se les ocurre alguna otra manera de hacerlo, de naturaleza diferente?

Manden mensaje, si así es: fedebosio93@gmail.com

Problema 4

Copio el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\check{\mathbf{I}} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\check{\mathbf{J}} + z\check{\mathbf{K}}$$

y la curva parametrizada

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2\cos t + 1) \;\text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

nos piden la integral de $\mathbf{F}$ sobre $\mathbf{c}$.

La calculamos, en una de esas sale.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[\mathbf{c}(t)] &= \left(\frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\right)\check{\mathbf{I}} + \left(\frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\right)\check{\mathbf{J}} + (2\cos t + 1)\check{\mathbf{K}} = \\ &= -\operatorname{sen} t\check{\mathbf{I}} + \cos t\check{\mathbf{J}} + (2\cos t + 1)\check{\mathbf{K}} \\ \mathbf{c}'(t) &= (-\operatorname{sen} t, \cos t, -2\operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

con lo cual

$$\mathbf{F}[\mathbf{c}(t)] \cdot \mathbf{c}'(t) = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t - 2(2\cos t + 1)\operatorname{sen} t = 1 - 2(2\cos t + 1)\operatorname{sen} t$$

y entonces

$$\int_C \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}[\mathbf{c}(t)] \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left[1 - 2(2\cos t + 1)\operatorname{sen} t\right]\, dt =$$
$$= 2\pi - 2\int_0^{2\pi} (2\cos t + 1)\operatorname{sen} t\, dt = 2\pi.$$

Si hubiésemos tratado de plantearlo con el teorema de Stokes... se complicaba bastante. Si se fijan, el campo tiene una singularidad en los puntos

$$x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$$

¡¡estos son *todos los puntos* del eje z!! (recuerden que estamos en $\mathbf{R}^3$). Complicado, ¿no? De todas maneras, la resolución es posible. La consideraremos como una **segunda forma**, que no abordaremos aquí por su gran complicación (requeriríamos entender bien el concepto de conjunto *simplemente conexo* para subconjuntos de $\mathbf{R}^3$, los cuales no son ya tan fáciles de ver como en $\mathbf{R}^2$).

Conclusión: la integral sale a mano y da 2π. Esta es la mejor manera de encarar el ejercicio. Pasemos al que sigue, sin entrar en más detalles.

Problema 5 Dos incisos, el primero:

$$\textbf{i)} \int_{C^+} \mathbf{F}_1, \qquad \text{con } \mathbf{F}_1(x,y,z) = \left(ze^{-x^2}, -\tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{2}x^2, \operatorname{sen}\left(z^2\right)\right),$$
$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x - 2z = 0 \wedge (x-z)^2 + y^2 - z = 0\right\}.$$

Si quisiéramos encarar la cuenta a mano, nos aparecen dos problemas:

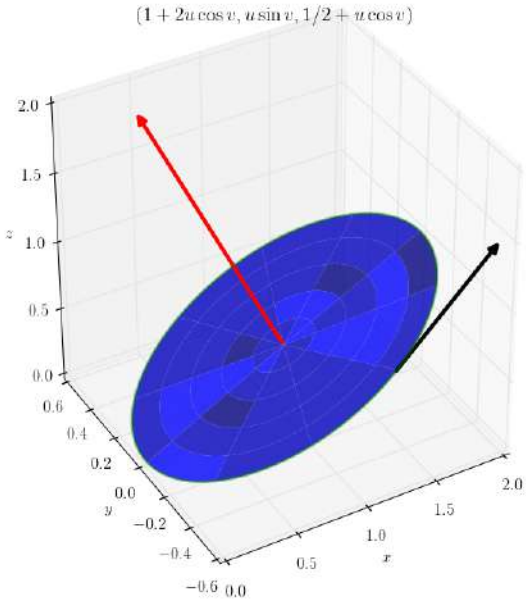
1. La parametrización de C es ligeramente complicada (no lo es tanto, de hecho, me atrevo a sugerirles que la parametricen, como ejercicio).
2. Se complica la expresión del campo $\mathbf{F}_1$ sobre dicha curva.

No todo está perdido: el campo $\mathbf{F}_1$ está bien definido en todo $\mathbf{R}^3$, y

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) = \left(z, e^{-x^2}, x\right)$$

además, existe un *disco plano* que tiene a C como frontera:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - 2z = 0 \wedge (x - z)^2 + y^2 - z \leq 0\} =$$
$$= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 2z \wedge z^2 + y^2 - z \leq 0\} =$$
$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 2z \wedge y^2 + \left(z - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4}\right\}$$



En la gráfica pueden apreciarse el disco plano A, su dirección normal positiva $(-1, 0, 2)$, y la curva C, borde del disco A. Se muestra un vector tangente a C, que caracteriza el sentido de recorrido. Visto desde el sector del espacio en el cual está contenido el vector normal, el recorrido es antihorario. La orientación de A induce el sentido correcto de recorrido sobre C.

Denotamos a la curva recorrida en este sentido como C^+.

Vamos a parametrizar A, de manera que su orientación induzca sobre C el recorrido *antihorario*, cuando miramos desde los z positivos.

$$\alpha : \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbf{R}^3, \ \alpha(u, v) = \left(1 + 2u \cos v, u \operatorname{sen} v, \tfrac{1}{2} + u \cos v\right)$$

Claramente la frontera se alcanza para $u = \frac{1}{2}$ (en este caso estamos en el borde del disco) así que, **una manera** de chequear que estamos orientando bien, es analizar la parametrización de la curva que "genera" α, la cual se obtiene al evaluar en los puntos frontera:

$$\mathbf{C}(t) = \alpha\left(\tfrac{1}{2}, t\right) = \left(1 + \cos t, \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos t\right)$$

Para "ver" desde los z positivos, podemos *proyectar* los puntos de la curva sobre el plano $z = 0$. Si el recorrido resultante es antihorario, estamos, si no, le cambiamos el signo a la integral y listo.

Los puntos $\left(1 + \cos t, \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t\right)$ con $0 \le t \le 2\pi$, describen el recorrido de la curva en el plano (x, y). Un rápido vistazo permite deducir que se trata de una elipse, recorrida en sentido antihorario. Estamos.

Como **segunda forma**, puede calcularse el vector normal:

$$\begin{array}{r}
\times\begin{cases} \alpha_u(u,v) = (\quad 2\cos v, \operatorname{sen} v, \quad \cos v) \\ \alpha_v(u,v) = (\quad -2u\operatorname{sen} v, u\cos v, \quad -u\operatorname{sen} v) \end{cases} \\
\hline
\mathbf{n}_\alpha(u,v) = (\quad -u, 0 \quad , \quad 2u)
\end{array}$$

Como $u > 0$ y la tercer componente es igual a $2u$, entonces el tercer coseno director es positivo, lo cual indica que la superficie orienta a la curva en forma positiva. Esto es debidamente cierto por el tipo de superficie: se trata de un disco plano.

Si todo hasta ahora les parece muy tirado de los pelos, existe una **tercer manera** de verificar que la orientación elegida para la superficie es la correcta. Requiere la noción de *base orientada*, un concepto del álgebra lineal.

Una base B_1 está orientada *positivamente* respecto de otra base B_2, cuando la matriz cambio de base de B_1 a B_2 tiene determinante positivo. Geométricamente, esto significa que B_1 se ve como una *terna derecha* en el espacio generado por B_2, vista desde esta base.

Podemos formar una base de $\mathbf{R}^3$ a partir de las parametrizaciones regulares de una superficie y una curva, contenida en dicha superficie, de la siguiente manera.

$$B = \left\{\mathbf{C}'(t), \mathbf{C}''(t), \mathbf{n}\left(\tfrac{1}{2}, t\right)\right\}$$

De acuerdo a la elección de $\mathbf{n}$, se obtendrá una base orientada positivamente respecto de la base canónica. Para verificar que esto ocurra, formamos la matriz cambio de base:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{C}'(t) &= (-\operatorname{sen} t, \tfrac{1}{2}\cos t, -\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t) \\ \mathbf{C}''(t) &= (-\cos t, -\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t, -\tfrac{1}{2}\cos t) \implies \\ \mathbf{n}\big(\tfrac{1}{2}, t\big) &= \big(-\tfrac{1}{2}, 0, 1\big) \end{aligned}\right.$$

$$\implies C_{BE}(t) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} t & \frac{1}{2}\cos t & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\cos t & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t & -\frac{1}{2}\cos t \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante para obtener la orientación:

$$\begin{aligned} \det\left[C_{BE}(t)\right] &= -\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\cos t & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t & -\frac{1}{2}\cos t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & \frac{1}{2}\cos t \\ -\cos t & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = \\ &= -\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{4}\cos^2 t - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2 t\right) + \left(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t + \tfrac{1}{2}\cos^2 t\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{2} = \\ &= \tfrac{5}{8} > 0. \end{aligned}$$

La orientación es positiva. ¡No se discute más! Pasamos al

Planteo del teorema.

Dado que C es una curva cerrada y simple, y que es borde de la superficie A considerada, y además el campo $\mathbf{F}_1$ está definido en toda la superficie A, podemos aplicar el teorema:

$$\int_{C^+} \mathbf{F}_1 = \int_{A^+} \operatorname{rot}(\mathbf{F}_1)$$

calculamos la integral de superficie, para ello

$$\begin{aligned} \left[\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1)\right]\left[\alpha(u,v)\right] &= \left[\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1)\right]\big(1 + 2u\cos v, u\operatorname{sen} v, \tfrac{1}{2} + u\cos v\big) = \\ &= \Big(\tfrac{1}{2} + u\cos v, e^{-(1+2u\cos v)^2}, 1 + 2u\cos v\Big) \end{aligned}$$

además, recordemos que

$$\mathbf{n}_\alpha(u,v) = (-u, 0, 2u)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \mathbf{F}_1 = \int_{A^+} \operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) &= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} \left[\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1)\right]\left[\alpha(u,v)\right] \cdot \mathbf{n}_\alpha(u,v)\, dv\, du = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} \big(\tfrac{3}{2}u + 3u^2\cos v\big)\, dv\, du = 3\pi\int_0^{\frac{1}{2}} u\, du = \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

Bien podríamos haber evitado la parametrización de A, si hubiésemos considerado la dirección normal en cartesianas, $\mathbf{n}_A = (-1, 0, 2)$. El resultado es el mismo, siempre que tomemos el sentido correcto de $\mathbf{n}_A$.

<u>Resolución alternativa</u>

$$\int_{C^+} \mathbf{F}_1 = \int_{A^+} \operatorname{rot}(\mathbf{F}_1)$$

Recordemos que

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) = \left(z, e^{-x^2}, x\right)$$
$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = 2z \wedge y^2 + \left(z - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4}\right\}$$

con lo cual, $\forall (x,y,z) \in A$, $\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) = \left(z, e^{-4z^2}, 2z\right)$ porque $x = 2z$.

$$\int_{C^+} \mathbf{F}_1 = \int_{A^+} \operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) = \iint\limits_{\left\{y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}\right\}} \operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{n}_A \, dy \, dz$$

como $\mathbf{n}_A = (-1, 0, 2)$ entonces $\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{n}_A = 3z$, y queda

$$\int_{C^+} \mathbf{F}_1 = 3 \iint\limits_{\left\{y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}\right\}} z \, dy \, dz.$$

Con el cambio a coordenadas polares

$$\begin{cases} y = \rho \cos\theta \\ z = \frac{1}{2} + \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 < \rho \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

el ejercicio queda cocinado al dente:

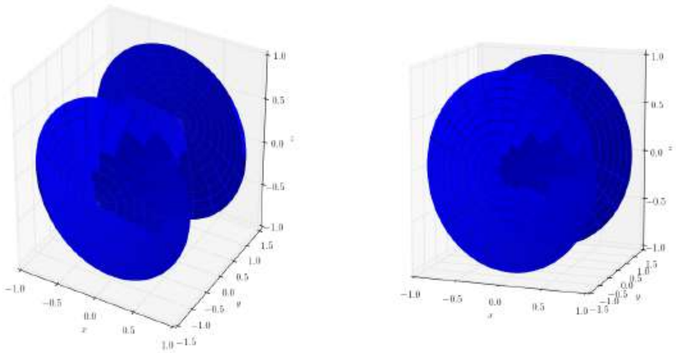
$$\int_{C^+} \mathbf{F}_1 = 3 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \rho \operatorname{sen}\theta\right) d\theta \, \rho \, d\rho = 3\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \rho \, d\rho = \frac{3}{8}\pi.$$

<u>ÚLTIMO EJERCICIO.</u> Con este, nos retiraremos triunfantes.

$$\textbf{ii)} \int_{S^+} \mathbf{F}_2, \qquad \text{con } \mathbf{F}_2(x,y,z) = \left(z^2, xy, -xz\right),$$
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \wedge x^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

La superficie S se trata de una esfera, pero no completa, pues está definida únicamente dentro del interior del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ con directriz y.

La siguiente gráfica muestra la situación, se trata de dos casquetes esféricos flotando en el espacio:



(son como dos *ovnis*, o un par de cimbales, o platos chinos enfrentados... la gráfica tiene muchas interpretaciones posibles). La cuenta que se pide

$$\int_{S^+} \mathbf{F}_2$$

se puede hacer a mano. Pero como se medio engorrosa, vamos a saltearla olímpicamente. Notemos que, en principio,

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}_2) = x - x = 0.$$

Construiremos entonces una superficie cerrada K, y aplicaremos a continuación el teorema de la divergencia, pues probablemente nos solucione la vida. Hay dos formas diferentes para construir K.

La **primer forma** consiste en construir *dos tapas planas* circulares. Las expresiones de las tapas se deducen al manipular las ecuaciones de S:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \quad +z^2 = 2 & (I) \\ x^2 \qquad\quad\; +z^2 = 1 & (II) \end{cases} \underset{(I)-(II)\longrightarrow(I)}{\Longrightarrow} \begin{cases} \quad y^2 \qquad\quad = 1 & (I) \\ x^2 \qquad +z^2 = 1 & (II) \end{cases}$$

tomando raíz cuadrada en (I) se obtienen las tapas $y = \pm 1$. La ecuación (II) proporciona la frontera de dichas tapas, luego

$$T_{-1} = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y = -1 \wedge x^2 + z^2 \leq 1\right\}$$
$$T_{+1} = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y = +1 \wedge x^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

Ahora $K = S \cup T_{-1} \cup T_{+1}$ se trata de la unión disjunta de dos superficies cerradas. Podemos aplicar el teorema de la divergencia a cada una de ellas, y al ser la divergencia cero, obtenemos en suma

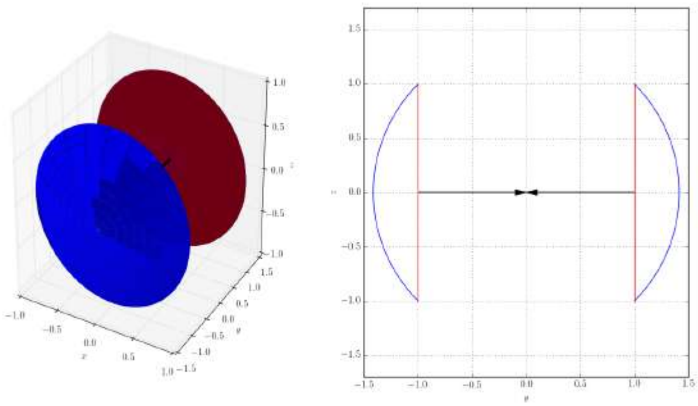
$$\int_{K^+} \mathbf{F}_2 = 0$$

por aditividad de la integral, tenemos

$$\int_{S^+} \mathbf{F}_2 = -\int_{T_{-1}^+} \mathbf{F}_2 - \int_{T_{+1}^+} \mathbf{F}_2$$

donde T_{-1}^+, T_{+1}^+ son las tapas orientadas de manera que el vector normal apunta al exterior de cada uno de los casquetes cerrados.

La siguiente gráfica muestra las orientaciones correctas de las tapas.



Para resolver las integrales de las tapas, podemos recurrir a cualquiera de los dos métodos vistos en el inciso anterior.

Ecuaciones paramétricas de las tapas.

Vendría a ser nuestro **método uno**, construimos dos parametrizaciones:

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}_{-1} : (0,1) \times (0, 2\pi), \qquad && \mathbf{t}_{-1}(u,v) = (u\cos v, -1, u \operatorname{sen} v) \\ &\mathbf{t}_{+1} : (0,1) \times (0, 2\pi), \qquad && \mathbf{t}_{+1}(u,v) = (u \operatorname{sen} v, +1, u\cos v) \end{aligned}$$

la permutación de componentes x, z efectuada en $\mathbf{t}_{+1}$ se hace para que el vector normal quede apuntando en la dirección correcta, como se indica en la figura (ver arriba). Esto no es estrictamente necesario: tranquilamente podríamos haber elegido las mismas funciones (salvo por la componente y)

para ambas tapas. Si alguna quedase negativamente orientada, se invierte el signo de la integral, y listo.

Las cuentas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_2\left[\mathbf{t}_{-1}(u,v)\right] &= \left(u^2\operatorname{sen}^2 v, -u\cos v, -u^2\cos v\operatorname{sen} v\right)\\
\mathbf{n}_{-1}(u,v) &= (0,+u,0)\\
\mathbf{F}_2\left[\mathbf{t}_{-1}(u,v)\right]\cdot\mathbf{n}_{-1}(u,v) &= -u^2\cos v\\
\int_{T_{-1}^{+}}\mathbf{F}_2 &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(-u^2\cos v\right)\,dv\,du =\\
&= \int_0^1\left(-u^2\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos v\,dv}_{0}\right)du = 0\\
\mathbf{F}_2\left[\mathbf{t}_{+1}(u,v)\right] &= \left(u^2\cos^2 v, +u\operatorname{sen} v, -u^2\cos v\operatorname{sen} v\right)\\
\mathbf{n}_{+1}(u,v) &= (0,-u,0)\\
\mathbf{F}_2\left[\mathbf{t}_{+1}(u,v)\right]\cdot\mathbf{n}_{+1}(u,v) &= +u^2\operatorname{sen} v\\
\int_{T_{+1}^{+}}\mathbf{F}_2 &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(+u^2\operatorname{sen} v\right)\,dv\,du = 0
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\int_{S^+}\mathbf{F}_2 = 0.$$

<u>Ecuaciones cartesianas de las tapas.</u>

El **método dos**.

Recordemos que

$$\begin{aligned}
T_{-1} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : y=-1 \wedge x^2+z^2\le 1\right\}\\
T_{+1} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : y=+1 \wedge x^2+z^2\le 1\right\}
\end{aligned}$$

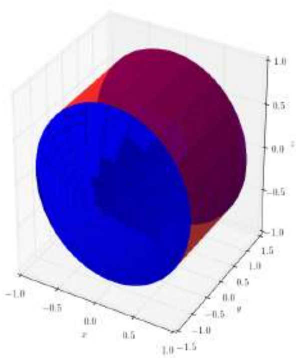
así que las cuentas quedan

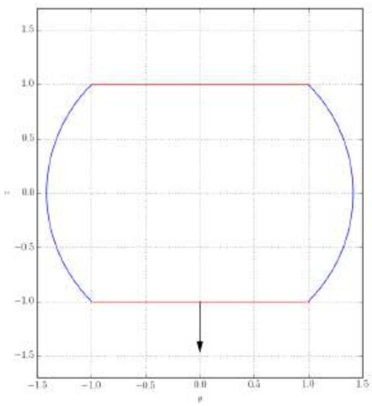
$$\begin{aligned}
\forall(x,y,z) \in T_{-1}, \mathbf{F}_2 &= \left(z^2, -x, -xz\right) \\
\mathbf{n}_{-1} &= (0,+1,0) \\
\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}_{-1} &= -x \\
\int_{T_{-1}} \mathbf{F}_2 &= - \iint_{\{x^2+z^2 \le 1\}} x\,dx\,dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{+\sqrt{1-z^2}} x\,dx\,dz = \\
&= \int_{-1}^{+1} \underbrace{\left[\tfrac{1}{2} x^2 \Big|_{-\sqrt{1-z^2}}^{+\sqrt{1-z^2}} \right.}_{0} dz = 0 \\
\forall(x,y,z) \in T_{+1}, \mathbf{F}_2 &= \left(z^2, +x, -xz\right) \\
\mathbf{n}_{+1} &= (0,-1,0) \\
\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}_{+1} &= -x \Longrightarrow \int_{T_{+1}} \mathbf{F}_2 = \int_{T_{-1}} \mathbf{F}_2 = 0.
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\int_{S^+} \mathbf{F}_2 = 0.$$

Nos queda por abordar una **segunda resolución** de este inciso, muy interesante también. Consiste en construir una tapa T *cilíndrica*, de generatriz circular y directriz y, que envuelva los casquetes flotantes.





No tiene sentido que acudamos a las ecuaciones paramétricas, puesto que, en este caso, las expresiones en cartesianas nos guían por el camino más rápido. Sea

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + z^2 = 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\right\}$$

en este caso, la superficie $K = S \cup T$ es cerrada y la aplicación del teorema deriva en

$$\int_{K^+} \mathbf{F}_2 = 0 \iff \int_{S^+} \mathbf{F}_2 = -\int_{T^+} \mathbf{F}_2$$

entonces el vector normal que apunta en el sentido que indica la figura es

$$\mathbf{n}_T = (2x, 0, 2z)$$

con lo cual

$$\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}_T = (2x)\left(z^2\right) + 0(xy) - (2z)(xz) = 0 \Longrightarrow \int_{T^+} \mathbf{F}_2 = 0 \Longrightarrow \int_{S^+} \mathbf{F}_2 = 0$$

Bueno espero que hayan disfrutado del resuelto.

Les mando saludos, y cualquier cosa, ya saben a dónde tienen que enviar sus amenazas de muerte:

fedebosio93@gmail.com

4 de diciembre de 2017.