ANALISIS 2 . (Ingenieria) Segundo parcial. (21 de Junio de 2017)

NOMBRE :..comision.......................e-mail

Problema 1. Sea $D \subset R^2$ la región definida por las siguientes desigualdades

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{2}{x} \quad \wedge \quad \frac{1}{y^2} \leqslant x \leqslant \frac{2}{y^2} \right\}$$

a) Calcular el area de la región D

b) Calcular el volumen bajo la gráfica de $f(x, y) = y^2$ para los $(x, y) \in D$.

....

Problema 2 : Dado el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = ((x - y)^n + 2xy)\,\mathbf{I} + (x^2 - (x - y)^n)\,\mathbf{J}$ calcular la siguiente integral de linea :

$$\int_C \boldsymbol{F}$$

donde $C \subset \mathbf{R}^2$ es la curva definida por

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 2a^2 \quad \wedge \quad y \geq x \right\}$$

....

Problema 3 : Sea el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(z \sin\left(x^4\right) - \tfrac{1}{2}y^2\right)\mathbf{I} + \left(z + x^2\right)\mathbf{J} + n \sin\left(z^2\right)\mathbf{K} \quad (n \in N)$$

Calcular la siguiente integral :

$$\int_C \boldsymbol{F}$$

donde la curva C está definida como $C = S_1 \cap S_2$ siendo, respectivamente

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x - 4)^2 + 2y^2 - z = 0 \right\} \qquad \mathbf{S}_2(u, v) = \left(u, v, 16 - u^2\right)\ ,\ (u, v) \in \mathbf{R}^2$$

....

Problema 4 : Sea S una superficie *cerrada* y *simple* y orientable en $\mathbf{R}^3$ que admite la siguiente parametrizacion $\mathbf{S}(u, v) \in C^1(D)$

$$\mathbf{S}(u, v) = \left(X(u, v)\,,Y(u, v)\,,Z(u, v)\right),\ (u, v) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

de modo tal que la orientacion positiva es $\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v = \mathbf{n}^+$

i) Probar que

$$\int_D Z(u, v)\,(X_u Y_v - X_v Y_u)\,\mathsf{d}u\mathsf{d}v = vol\,(V)$$

donde $V = \mathbf{int}\,(S) =$ puntos de R^3 que quedan encerrados por S

ii) Dado el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (\alpha x)\,\mathbf{I} + (\beta y)\,\mathbf{J}$$

hallar la condición que deben cumplir las constantes $\alpha, \beta \in R$ para que se cumpla la siguiente igualdad :

$$\int_D Z(u, v)\,(X_u Y_v - X_v Y_u)\,\mathsf{d}u\mathsf{d}v = \int_{S^+} \boldsymbol{F}$$

iii) Aplicar el inciso i) a la superficie del *toro*

$$\mathbf{S}(u, v) = \left((R + r\cos v)\cos u\,, (R + r\cos v)\sin u\,, r\sin v\right) \quad \text{para } (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

Resuelto

Problema 1. Reescribamos las desigualdades de la región, cosa de tenerlas a mano:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \ \wedge \ \frac{1}{y^2} \leq x \leq \frac{2}{y^2} \right\}$$

a) Se pide el área de la región D.

En principio, de la segunda desigualdad se infiere que $y \neq 0$, entonces $y^2 > 0$ con lo cual $x \geq \frac{1}{y^2} > 0$ es decir $x > 0$ por transitividad. Esto implica a su vez que $y \geq \frac{1}{x} > 0$, por lo tanto la región D se encuentra en el primer cuadrante por ser $x > 0 \wedge y > 0$.

Esto permite multiplicar miembro a miembro las desigualdades por x e y^2 sin alterar los signos, lo cual justamente hacemos ahora:

$$1 \leq xy \leq 2 \ \wedge \ 1 \leq xy^2 \leq 2 \tag{1}$$

Se ve la gran conveniencia de tomar el cambio de variable

$$T^{-1} : \begin{cases} u = xy \\ v = xy^2 \end{cases} \tag{2}$$

con lo cual (1) queda

$$1 \leq u \leq 2 \ \wedge \ 1 \leq v \leq 2$$

en rigor

$$T^{-1}(D) = \left\{ (u, v) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq u \leq 2 \ \wedge \ 1 \leq v \leq 2 \right\} = [1, 2] \times [1, 2]. \tag{3}$$

Se muestran las regiones D y $T^{-1}(D)$ en la Figura 1.

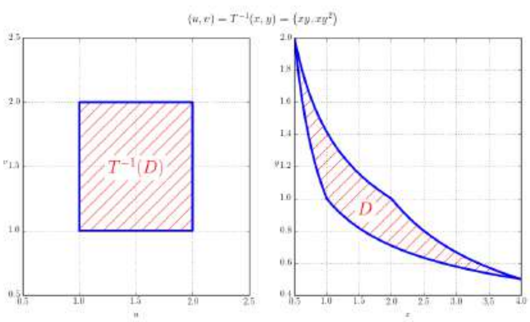

Figura 1: Representación gráfica de la región D dada por el enunciado en el plano (x, y) (der.), y su transformada inversa $T^{-1}(D)$ en el plano (u, v) (izq).

La notación T^{-1} indica que al definir (u, v) en función de (x, y) estamos definiendo la *inversa* de la transformación necesaria para la fórmula del cambio de variable. Recordemos que

$$dA = dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \left|\det\Big(T'(u,v)\Big)\right| du\,dv$$

donde T es una transformación que va de (x, y) a (u, v) y no al revés, como nosotros hicimos. La cuestión en haber definido (u, v) en función de (x, y) es que obtuvimos una función (u, v) de (x, y), exactamente al revés de la que aparece en la fórmula, de ahí que empleemos la notación $T^{-1}(x, y)$ en casos como este. Hacemos especial hincapié en esto porque todos los cuatrimestres hay mucha gente que lo pregunta.

Así que tenemos $T^{-1}(x, y)$ y no $T(u, v)$ como necesitaríamos. Hay dos maneras de calcular el jacobiano (determinante de la derivada de la transformación) en este caso.

1. Calculando explícitamente la transformación $T(u, v)$. Dicho de otra manera, se calcula primero la transformación T despejando (x, y) en función de (u, v), y recién entonces, se calcula el jacobiano.

2. Sin despejar explícitamente $(x, y) = T(u, v)$, sabiendo que

$$T'(u,v) = \Big(\left(T^{-1}\right)'(x,y)\Big)^{-1}$$

entonces sus determinantes son inversos

$$\det\Big(T'(u,v)\Big) = \frac{1}{\det\Big(\left(T^{-1}\right)'(x,y)\Big)}$$

con lo cual

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\Big(T'(u,v)\Big)\right| = \frac{1}{\left|\det\Big(\left(T^{-1}\right)'(x,y)\Big)\right|} = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}$$

Haremos los dos, pues ambos caminos "llevan a Roma". Después cada uno elige el que más le guste. Comenzaremos por el número 1.

Calculamos T despejando (x, y) en función de (u, v) de la definición (2):

$$\begin{cases} u = xy \\ v = xy^2 \end{cases} \implies \begin{array}{l} \dfrac{v}{u} = \dfrac{\cancel{x}y^{\cancel{2}}}{\cancel{xy}} = y \\[2ex] \dfrac{u^2}{v} = \dfrac{(xy)^2}{xy^2} = \dfrac{x^{\cancel{2}}\cancel{y^2}}{\cancel{x}\cancel{y^2}} = x \end{array}$$

es decir

$$T : \begin{cases} x = \dfrac{u^2}{v} \\ y = \dfrac{v}{u} \end{cases} \tag{4}$$

con lo cual

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{2\cancel{u}}{v}\cdot\frac{1}{\cancel{u}} - \left(\frac{\cancel{v}}{\cancel{u^2}}\right)\left(-\frac{\cancel{u^2}}{v^{\cancel{2}}}\right) = \frac{2}{v} - \frac{1}{v} = \frac{1}{v}$$

y por lo tanto $dA = dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \frac{1}{v} du\,dv$. Con lo cual el área de la región D es:

$$\text{área}(D) = \iint\limits_{D} dx\,dy = \iint\limits_{T^{-1}(D)} \frac{1}{v}\,du\,dv$$

aplicando (3) queda

$$\begin{aligned} \text{área}(D) &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{v}\,du\,dv = \left(\int_1^2 du\right)\left(\int_1^2 \frac{1}{v}\,dv\right) = u\Big|_1^2 \ln v\Big|_1^2 = \\ &= (2-1)(\ln 2 - \ln 1) = \ln 2. \end{aligned}$$

Ahora iremos por la segunda forma. Recordemos la propiedad:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}.$$

Calculamos entonces, teniendo en cuenta (2), el jacobiano inverso

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 2xy^2 - xy^2 = xy^2 = v$$

con lo cual

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = \frac{1}{v}$$

queda exactamente lo mismo que antes $dA = \frac{1}{v} du\,dv$ por lo tanto de (3)

$$\begin{aligned} \text{área}(D) &= \iint\limits_{D} dA = \iint\limits_{T^{-1}(D)} \frac{1}{v}\,du\,dv = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{v}\,du\,dv = \\ &= \left(\int_1^2 du\right)\left(\int_1^2 \frac{1}{v}\,dv\right) = \ln 2. \end{aligned}$$

En definitiva, obtuvimos la única y verdadera
Respuesta: área$(D) = \ln 2$.

b) Se pide el volumen bajo la gráfica de un función de dos variables $f(x,y) = y^2$ sobre la región D. Como vimos en la clase de integral doble, es precisamente dicha integral, cuando se toma un integrando funcional $f(x,y) \geq 0$, lo que permite calcular el *volumen* bajo la gráfica de la función f dentro de la región de integración. Eso plantearemos. Como $f(x,y) = y^2 \geq 0$ entonces el volumen pedido es llanamente

$$\mathrm{vol}(V) = \iint_D f(x,y)dA = \iint_D y^2 dx\, dy$$

donde enchufamos la letra V al sólido delimitado por la gráfica de la función f y la región plana D. Acudimos entonces al cambio de variable (2) para calcular el vol(V), y de acuerdo al método empleado en el inciso anterior, a saber:

1. despejar T
2. calcular el jacobiano inverso

actuaremos en consecuencia aquí y ahora. De haber resuelto el inciso a) mediante el despeje de T (método 1), este inciso no tiene mayor complicación. Sustituimos y^2 según la fórmula (4) que nos decía

$$y = \frac{v}{u} \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \frac{v^2}{u^2}$$

y recordando la relación $dA = \frac{1}{v} du\, dv$ queda

$$\mathrm{vol}(V) = \int_1^2 \int_1^2 \frac{v^{\cancel{2}}}{u^2} \cdot \frac{1}{\cancel{v}} du\, dv = \left(\int_1^2 \frac{1}{u^2}\, du \right) \left(\int_1^2 v\, dv \right) = \left[-\frac{1}{u} \right]_1^2 \frac{v^2}{2}\Big|_1^2 =$$
$$= \left[-\frac{1}{2} + 1 \right] \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

En caso de haber recurrido al método 2 (en donde no conoceríamos la transformación T explícitamente) convendría hacer la cuenta en (x,y) hasta el último momento para después recién cambiar a (u,v). Esto puede y suele simplificar las cosas.

¿Y por qué habríamos de hacerlo así? Sabemos que el integrando consistirá de la función multiplicada por el jacobiano

$$dV = f(x,y)\, dA = f\Big(T(u,v)\Big) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv = f\Big(T(u,v)\Big) \frac{1}{\left| \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right|} du\, dv$$

con lo cual puede primero efectuarse el cociente "*función : jacobiano inverso*" en (x, y), **antes** de aplicar el cambio, y ver qué queda, en el mejor de los casos (y el más aburrido de todos, por cierto) la función y el jacobiano inverso se cancelarán. Veamos si esto sucede o no aquí:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = xy^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x,y)}{\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = \frac{\cancel{y^2}}{x\cancel{y^2}} = \frac{1}{x}$$

(no se cancelaron, ¡a divertirse!) necesitaremos despejar x en función de u y v, eso haremos a continuación (acá se ve la ventaja del método 1, de haber despejado la transformación T antes, no necesitaríamos hacerlo en este momento). Despejamos x en función de (u, v), de la definición (2):

$$\begin{cases} u = xy \\ v = xy^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{u^2}{v} = \frac{(xy)^2}{xy^2} = \frac{x^{\cancel{2}}\cancel{y^2}}{\cancel{x}\cancel{y^2}} = x$$

por lo tanto $dV = \frac{1}{x} du\, dv = \frac{v}{u^2} du\, dv$ con lo cual

$$\mathrm{vol}(V) = \int_1^2 \int_1^2 \frac{v}{u^2}\, du\, dv = \left(\int_1^2 \frac{1}{u^2}\, du\right)\left(\int_1^2 v\, dv\right) = \frac{3}{4}.$$

En definitiva, obtuvimos, otra vez, la única y verdadera
RESPUESTA: $\mathrm{vol}(V) = \frac{3}{4}$.

Problema 2. Se proporcionan los siguientes datos:

1. un *campo vectorial* $\mathbf{F}(x, y) = \big((x-y)^n + 2xy\big)\hat{\mathbf{I}} + \big(x^2 - (x-y)^n\big)\hat{\mathbf{J}}$
2. una *curva* plana $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 2a^2 \ \wedge \ y \geq x\}$

y se pide la integral curvilínea sobre C del campo $\mathbf{F}$.
Observemos que no se indica orientación alguna.

Identificaremos de qué se trata la curva C, como para darnos una idea geométrica. Completando cuadrados, la ecuación de C deviene

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 = 2a^2 \iff 3\left(x - \tfrac{2}{3}y\right)^2 + \tfrac{5}{3}y^2 = 2a^2$$

queda una suma de cuadrados igualada a una constante positiva, se trata entonces de una elipse rotada.

Notemos que está *abierta* puesto que C solamente admite los puntos de la elipse que están en el semiplano $y \geq x$, o de otra manera, los puntos que están *por encima* de la recta $y = x$ (Geometría Analítica Básica). De existir más de un único cruce entre elipse y recta, la curva C estará abierta. Calculemos:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4xy + 3y^2 &= 2a^2 \ \wedge \ y = x \\ 3x^2 - 4x^2 + 3x^2 &= 2a^2 \\ 2x^2 &= 2a^2 \\ x &= \pm a \\ &\text{como } y = x \Longrightarrow y = \pm a \end{aligned}$$

hay dos intersecciones $(-a, -a)$, (a, a) que evidentemente son los *extremos* de la curva. Para consolidar las ideas, se incluye en la Figura 2 una representación gráfica de la curva C con todos los parámetros en juego.

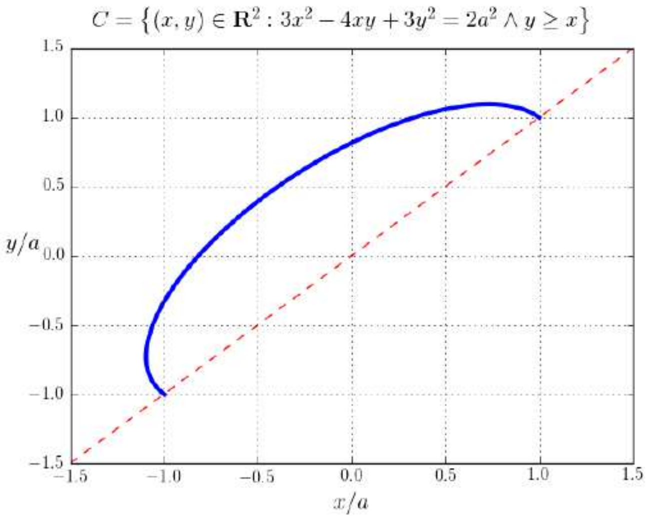

Figura 2: Gráfica de la elipse C, junto con la recta identidad $y = x$ por encima de la cual se encuentra definida la curva. Los ejes corresponden a valores normalizados $\frac{x}{a}, \frac{y}{a}$ para independizar la gráfica del valor de a.

Nuevamente, existen en principio *dos* maneras de plantear el ejercicio (otra vez, muchos caminos que llevan a un mismo lugar, como si de ir a un negocio del centro se tratase) haremos las dos, dejando pie a que cada uno elija después la que más le place.

Para ambos necesitamos el *rotacional escalar* (tercer componente del rotor en $\mathbf{R}^3$) del campo vectorial $\mathbf{F}$. Calculémoslo:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) &= D_x\left(x^2 - (x-y)^n\right) - D_y\big((x-y)^n + 2xy\big) = \\ &= \cancel{2x} - n(x-y)^{n-1} - n(x-y)^{n-1}(-1) - \cancel{2x} = \\ &= \cancel{-n(x-y)^{n-1}} + \cancel{n(x-y)^{n-1}} = 0. \end{aligned}$$

Con esto en mente, abordaremos cada uno de los métodos posibles.

1. cerrar la curva con un segmento de recta identidad

   $$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3x^2 - 4xy + 3y^2 \leq 2a^2 \ \wedge \ y = x\right\}$$

   contenido *dentro* de la elipse. Como la intersección está en $x = \pm a$

   $$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -a \leq x \leq a \ \wedge \ y = x\right\}$$

   Con esto, la curva $C \cup \Gamma$ es *cerrada* y por lo tanto puede aplicarse el teorema de Green para calcular la integral curvilínea, por estar definido $\mathbf{F}$ en todo $\mathbf{R}^2$.

2. Dejar la curva C así abierta como está, y evaluar el *potencial escalar* de $\mathbf{F}$ en los puntos inicial y final, cosa perfectamente viable por tratarse $\mathbf{F}$ de un campo *conservativo*, es decir un campo *continuamente diferenciable* (con derivada continua) en todo $\mathbf{R}^2$, cuyo *rotor* es *nulo*.

Comenzaremos por el método 1: construimos la recta

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -a \leq x \leq a \ \wedge \ y = x\right\}$$

de manera tal que $L = C \cup \Gamma$ es *cerrada*, y como el campo está definido en todo $\mathbf{R}^2$, en particular en el interior de la curva $\operatorname{int}(L)$, la curva encierra un *simplemente conexo*: estamos en condiciones de aplicar el teorema de Green:

$$\int_{L^+} \mathbf{F} = \iint_{\operatorname{int}(L)} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) = 0$$

Es importante notar que L es recorrida *antihorario* con el único motivo de aplicar correctamente el teorema. No obstante, dado que el rotacional escalar $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$ es nulo, la aplicación del teorema puede realizarse tanto para L^+ como para L^-.

Si bien $L = C \cup \Gamma$ es una curva cerrada, está compuesta por la unión de curvas abiertas, cuyo sentido de recorrido queda determinado por los puntos final e inicial de cada una. Definiremos dichos puntos, una nomenclatura posible es la siguiente:

$$A_1 = (-a, -a),\ A_2 = (a, a),\ M = C \cap \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -a < x < a\right\},$$
$$N = \Gamma \cap \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -a < x < a\right\}$$

ubicando los puntos en el plano se obtendrá algo como la Figura 3.

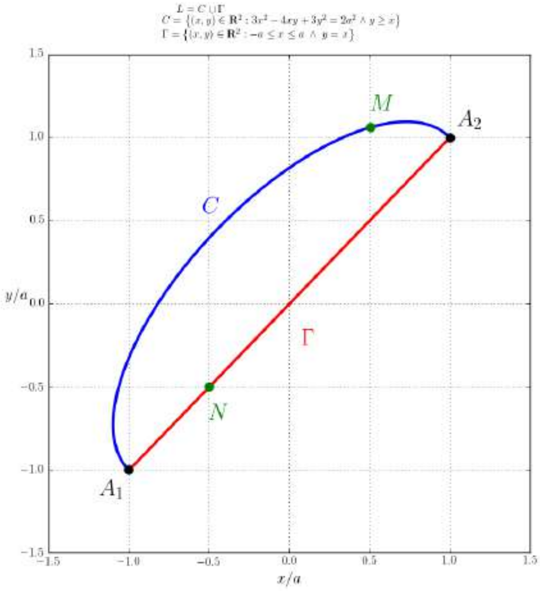

Figura 3: Gráfica de la curva L junto con los puntos A_1, A_2, M, N.

En tal caso $L^+ = \widehat{A_1NA_2MA_1}$ de manera que, al aplicar el teorema de Green a la curva L^+ (es decir, L orientada *antihorario*):

$$\int_{L^+} \mathbf{F} = 0$$

$$\int_{\widehat{A_1NA_2MA_1}} \mathbf{F} = 0$$

$$\int_{\overline{A_1NA_2}} \mathbf{F} + \int_{\widehat{A_2MA_1}} \mathbf{F} = 0$$

$$\int_{\widehat{A_2MA_1}} \mathbf{F} = -\int_{\overline{A_1NA_2}} \mathbf{F}$$

en este caso estaríamos calculando la integral curvilínea sobre la elipse C con punto inicial en A_2 y final en A_1, a partir de la integral sobre la recta Γ cuando partimos de A_1 y arribamos al punto A_2. Bien podríamos calcular la integral sobre C en sentido contrario (partiendo del punto A_1 y arribando al punto A_2), revirtiendo el signo para compatibilizar la orientación:

$$\int_{\widehat{A_1MA_2}} \mathbf{F} = + \int_{\overline{A_1NA_2}} \mathbf{F} \tag{5}$$

esta relación pone de manifiesto la *independencia de la trayectoria* del campo $\mathbf{F}$, pues daría lo mismo calcular la integral sobre la curva Γ que sobre C, yendo de A_1 hasta A_2.

Calcularemos entonces la integral pedida orientando las curvas como en la ecuación (5), a saber, partiendo del punto A_1 y arribando al A_2.

Parametrizamos Γ en consecuencia, sea $\gamma(t) = (t, t)$ evidentemente debemos tomar $-a \leq t \leq a$ para que $\mathrm{Im}(\gamma) = \Gamma$, es decir, para que $\gamma(t)$ recorra el segmento Γ partiendo de A_1 y llegando al punto A_2, como requerimos. Luego

$$\begin{aligned}
\int_{C_{A_1\,A_2}} \mathbf{F} = \int_{\widehat{A_1MA_2}} \mathbf{F} = \int_{\overline{A_1NA_2}} \mathbf{F} &= \int_{-a}^{a} \mathbf{F}\Big(\gamma(t)\Big) \cdot \gamma'(t)\, dt = \\
&= \int_{-a}^{a} \mathbf{F}(t,t) \cdot \Big(\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{J}}\Big)\; dt = \\
&= \int_{-a}^{a} \Big(\big(0^n + 2t^2\big)\hat{\mathbf{I}} + \big(t^2 - 0^n\big)\hat{\mathbf{J}} \Big) \cdot \Big(\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{J}}\Big)\; dt = \\
&= \int_{-a}^{a} \big(2t^2 + t^2\big)\, dt = \int_{-a}^{a} 3t^2\, dt = 2\int_{0}^{a} 3t^2\, dt = 2t^3\Big|_0^a = 2a^3.
\end{aligned}$$

Si decidiéramos recorrer C al revés:

$$\int_{C_{A_2\,A_1}} \mathbf{F} = -\int_{C_{A_1\,A_2}} \mathbf{F} = -2a^3.$$

Es *muy importante* observar que el *signo* de la integral pedida *está directamente ligado* con la *orientación* que elijamos.

Ahora vamos por el *segundo método.*

Como $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = 0$ existe un potencial escalar ϕ que satisface el *sistema* de *ecuaciones diferenciales* en *derivadas parciales* $\phi'(x,y) = \mathbf{F}(x,y)$:

$$\begin{cases} \phi_x = (x-y)^n + 2xy & \text{(Ec. 1)} \\ \phi_y = x^2 - (x-y)^n & \text{(Ec. 2)} \end{cases}$$

integrando la (Ec. 1) respecto de x tenemos

$$\phi(x,y) = \int \Big((x-y)^n + 2xy \Big)\, dx$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{n+1}(x-y)^{n+1} + x^2 y + g(y) \tag{6}$$

derivamos miembro a miembro respecto de y, aplicando la (Ec. 2):

$$\begin{aligned}
\phi_y(x,y) &= -(x-y)^n + x^2 + g'(y) \\
\cancel{x^2 - (x-y)^n} &= \cancel{-(x-y)^n + x^2} + g'(y) \\
0 &= g'(y) \\
K &= g(y)
\end{aligned}$$

con lo cual, al sustituir en (6), obtenemos:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{n+1}(x-y)^{n+1} + x^2 y + K.$$

Como $\mathbf{F}$ es *conservativo*, al definir los puntos

$$A_1 = (-a,-a),\ A_2 = (a,a)$$

(ver Figura 3) la integral sobre C, recorrida de A_1 a A_2, queda

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_{A_1 A_2}} \mathbf{F} = \int\limits_{C_{A_1 A_2}} \nabla\phi = \int_{A_1}^{A_2} d\phi = \phi\left(A_2\right) - \phi\left(A_1\right) = \\
&= \left\{\frac{1}{n+1}0^{n+1} + a^2 a\right\} - \left\{\frac{1}{n+1}0^{n+1} + (-a)^2(-a)\right\} = \\
&= a^3 - (-a^3) = 2a^3.
\end{aligned}$$

Si decidiéramos recorrer C al revés:

$$\int\limits_{C_{A_2 A_1}} \mathbf{F} = -\int\limits_{C_{A_1 A_2}} \mathbf{F} = -2a^3.$$

¡Mismos resultados! Todo cierra.

Observación importante: como adelantamos previamente, la integral *depende* de la orientación elegida, pues se trata de una integral curvilínea de *segundo tipo*. Es importante destacar esto, puesto que el resultado del ejercicio cambia si se decide recorrer la elipse de A_1 a A_2, o al revés.

Podemos dar entonces la siguiente

Respuesta: la integral pedida *depende* de la *orientación* elegida para la curva C, entonces

$$\int\limits_{C_{A_1 A_2}} \mathbf{F} = 2a^3, \qquad \int\limits_{C_{A_2 A_1}} \mathbf{F} = -2a^3$$

siendo $A_1 = (-a,-a)$, $A_2 = (a,a)$.

Problema 3 Copiemos el enunciado para tenerlo a mano. Dados

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(z \operatorname{sen}\left(x^4\right) - \tfrac{1}{2}y^2\right)\hat{\mathbf{I}} + \left(z + x^2\right)\hat{\mathbf{J}} + n \operatorname{sen}\left(z^2\right)\hat{\mathbf{K}},\ n \in \mathbf{N} \tag{7}$$

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (x-4)^2 + 2y^2 - z = 0\right\} \tag{8}$$

$$\mathbf{S}_2(u,v) = \left(u, v, 16 - u^2\right), \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2 \tag{9}$$

$$C = S_1 \cap S_2$$

se pide la integral curvilínea sobre C del campo $\mathbf{F}$.

Calculemos $C = S_1 \cap S_2$. Para simplificar un poco las cosas recurramos a la ecuación implícita de la superficie S_2:

$$\text{de (9)}, \qquad S_2 : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 16 - u^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z = 16 - x^2 \tag{10}$$

sustituimos en la ecuación (8)

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + 2y^2 - z &= 0 \\ (x-4)^2 + 2y^2 - \left(16 - x^2\right) &= 0 \\ x^2 - 8x + \cancel{16} + 2y^2 - \cancel{16} + x^2 &= 0 \\ 2x^2 - 8x + 2y^2 &= 0 \\ x^2 - 4x + y^2 &= 0 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned} \tag{11}$$

esta es la *proyección* de la curva intersección $C = S_1 \cap S_2$ en el plano (x,y). Es una curva cerrada. Como S_2 es la gráfica de una función por (10), la curva contenida en ella también tiene que tratarse de una curva cerrada.

Para los escépticos, haremos la cuenta:

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \iff \begin{cases} x - 2 = 2\cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2(1 + \cos t) \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases}$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$ para que la descripción paramétrica de la proyección sea *simple*. Sustituyendo en (10) obtenemos

$$z = 16 - x^2 = 16 - 4(1 + \cos t)^2$$

$$\therefore C = S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x = 2(1 + \cos t) \\ y = 2 \operatorname{sen} t \\ z = 16 - 4(1 + \cos t)^2 \end{cases}$$

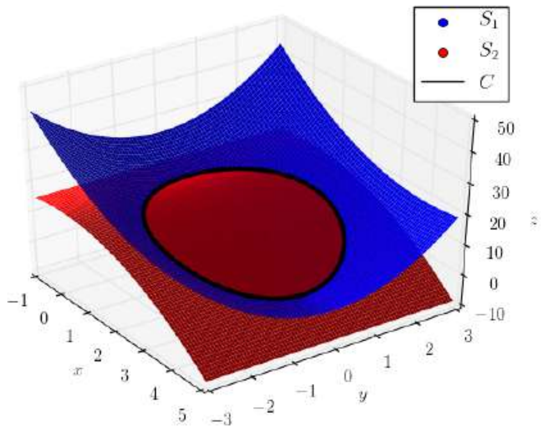

Figura 4: Representación gráfica de la intersección entre las superficies S_1 y S_2, que tiene a la curva C como resultante.

y designando $\mathbf{C}(t) = \big(2(1+\cos t), 2\operatorname{sen} t, 16 - 4(1+\cos t)^2\big)$ se obtiene $\mathbf{C}(0) = (4,0,0) = \mathbf{C}(2\pi)$, con lo cual la curva es *cerrada*.

Se muestra la situación geométrica en la Figura 4.

Ahora si tratásemos de encarar la integral curvilínea directamente

$$\int_{C^+} \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\Big(\mathbf{C}(t)\Big) \cdot \mathbf{C}'(t)\, dt$$

tendríamos que hacer una terrible cuenta, que claramente no haremos.

La curva reúne todas las condiciones como para aplicar el teorema de Stokes (como aquellas que debería cumplir un deportista para competir, o los formularios que debe tener en su poder aquel que quiere iniciar un trámite), enumeremos dichas condiciones o requisitos:

1. un campo vectorial *continuamente diferenciable* (con derivada primera continua) sobre la superficie y la curva.

2. curva *cerrada*, *simple* y *regular por tramos*

3. superficie *abierta*, *simple* y *orientable* que tenga a la *curva* como *borde*

Tanto el campo $\mathbf{F}$ como la curva C cumplen las condiciones enunciadas, lo único que nos queda por determinar es alguna superficie S tal que $\partial S = C$ (se lee: "frontera de S igual a C, o *borde* de S igual a C").

En principio, cuando la curva está dada por la intersección de dos superficies como en este caso, existen otras dos superficies, útiles para la aplicación del teorema, que se desprenden automáticamente. De (8) y (10):

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x-4)^2 + 2y^2 - z \leq 0 \ \wedge \ z = 16 - x^2\right\}$$
$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x-4)^2 + 2y^2 - z = 0 \ \wedge \ z \leq 16 - x^2\right\}$$

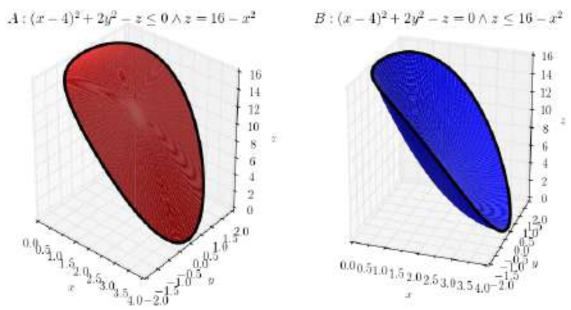

Figura 5: Gráficas de las superficies A y B que tienen a la curva $C = S_1 \cap S_2$ como borde. En principio, puede utilizarse cualquiera de las dos para aplicar el teorema de Stokes.

Como puede apreciarse en la Figura 5, la superficie A es la porción de cilindro parabólico S_2 que yace por encima del paraboloide elíptico S_1, mientras que B es la parte de"casquete paraboloidal" S_1 ubicada por debajo del cilindro parabólico S_2.

Para elegirla, generalmente conviene vislumbrar primero la expresión del rotor, y actuar en consecuencia. Lo calculamos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\Big(\mathbf{F}(x, y, z)\Big) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{I}} & \hat{\mathbf{J}} & \hat{\mathbf{K}} \\ D_x & D_y & D_z \\ z \operatorname{sen}\left(x^4\right) - \frac{1}{2}y^2 & z + x^2 & n \operatorname{sen}\left(z^2\right) \end{vmatrix} = \\
&= -\hat{\mathbf{I}} + \operatorname{sen}\left(x^4\right)\hat{\mathbf{J}} + (2x + y)\hat{\mathbf{K}}.
\end{aligned} \tag{12}$$

La superficie más conveniente es aquella cuyo vector normal simplifica en mayor medida la cuenta (siempre que el dominio de su parametrización nos permita avanzar posteriormente). Como primer vistazo, nos ampararemos en los gradientes de las funciones que determinan (8) y (10)

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{n}_2 = 2x\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{K}}$$
$$\mathbf{n}_B = \mathbf{n}_1 = 2(x-4)\hat{\mathbf{I}} + 4y\hat{\mathbf{J}} - \hat{\mathbf{K}}$$

al efectuar el producto escalar con el rotor se pone de manifiesto la *gran ventaja* que supone *elegir* la superficie A para el teorema

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_A = y$$

lo cual haremos. Atención que la cuenta con **el gradiente** de la implícita **no define nada**, la ecuación implícita no tiene asignada específicamente a priori un *dominio de integración* como sí pueden tenerlo la *gráfica de una función* o una *superficie parametrizada*. Utilizamos los gradientes por si, en una de esas, alguno resulta ortogonal al rotor del campo (como hemos dicho, esto se da "en una de esas..." aquí en este caso, por ejemplo, no sucedió).

Elegiremos la superficie A. Como (11) es la curva intersección $C = S_1 \cap S_2$, la superficie A puede expresarse de la siguiente forma:

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \;\wedge\; z = 16 - x^2\right\}$$

o bien, recurriendo a la parametrización (9),

$$A = \left\{\mathbf{S}(u, v) : (u-2)^2 + v^2 \leq 4\right\} \tag{13}$$

donde A cumple las condiciones necesarias para aplicar el teorema de Stokes, ya que se trata de una superficie *simple, abierta y orientable* cuyo borde es $\partial A = C$ (con *enunciar* esto tenemos bastante, *demostrarlo* quedará para *otra vida*). No obstante, previo al planteo del teorema, queda por discutir el asunto que muchos ignoran olímpicamente en el examen (y por eso después la cuenta les da mal) y es la *compatibilidad* de las *orientaciones*.

Calcularemos el vector normal *como se debe* a partir de la parametrización (13) así nos liberamos de las ambigüedades que acarrean las implícitas:

$$\mathbf{n}_A(u, v) = \mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{I}} & \hat{\mathbf{J}} & \hat{\mathbf{K}} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2u\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{K}}. \tag{14}$$

Para visualizar el problema, tomamos un punto de la superficie A, esto lo hacemos fijando el par (u, v) de manera tal que se encuentre dentro del dominio de definición de la superficie, que llamaremos

$$\mathcal{D}_A = \left\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : (u-2)^2 + v^2 \leq 4\right\}$$

Por comodidad tomaré el centro de $\mathcal{D}_A$, es decir $(u, v) = (2, 0)$ (el centro es aquello que anula la suma de cuadrados) entonces $(2, 0) \in \mathcal{D}_A$ y

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{S}(u, v) = \left(u, v, 16 - u^2\right) & \Longrightarrow & \mathbf{S}(2, 0) = (2, 0, 12) \\ \mathbf{n}_A(u, v) = 2u\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{K}} & \Longrightarrow & \mathbf{n}_A(2, 0) = 4\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{K}} \end{array}$$

con esto sabemos que, ubicándonos en el punto $(2, 0, 12)$, el vector normal en dicho punto será $4\hat{\mathbf{I}}+\hat{\mathbf{K}}$. Para comparar esta orientación con la de la curva, partimos del hecho de que $\mathbf{C}(t)$ es cerrada y por lo tanto basta con un único punto adicional a $\mathbf{C}(0) = (4, 0, 0) = \mathbf{C}(2\pi)$ para determinar su orientación. Calculamos p. ej. $\mathbf{C}(\pi) = (0, 0, 16)$ entonces sabemos que la parametrización *parte* del punto $(4, 0, 0)$, "da un rodeo" hasta el $(0, 0, 16)$ y después "baja" de nuevo hasta el $(4, 0, 0)$. Si no podemos verlo en 3D (quizás podríamos pero solamente con un bueeeen dibujo de Ricardo a nuestra vera) recurrimos a la *proyección* de la curva en alguno de los planos coordenados. En este caso, tanto en el (x, y) como en el (y, z) se obtienen *curvas cerradas*, y dado que A es un tramo de *gráfica de función*, conservará la orientación de cualquiera de sus proyecciones. Ambas situaciones se muestran en la Figura 6. Podríamos también recurrir al vector tangente $\dot{\mathbf{c}}(t)$ para evaluar la orientación de la curva, puesto que el sentido de recorrido de la misma coincide con el sentido de su vector tangente.

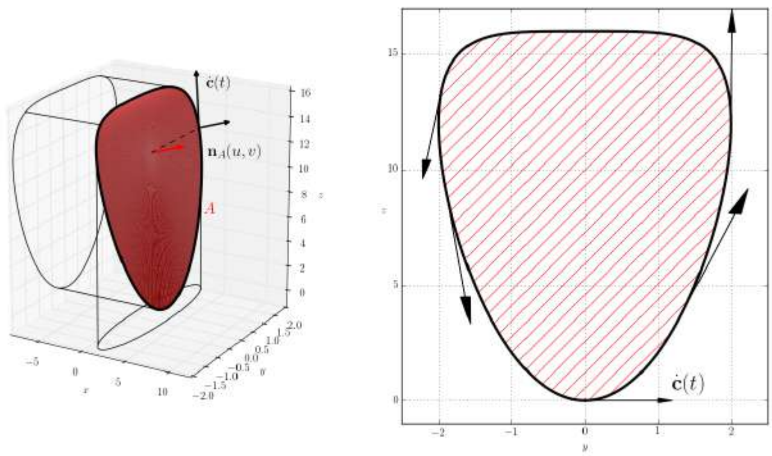

Figura 6: Izq.: Gráfica tridimensional de la superficie A, junto con sus vectores normales $\mathbf{n}_A(u, v)$ y el vector tangente a su borde $\dot{\mathbf{c}}(t)$. Se muestran también las proyecciones en los planos (x, y) e (y, z). Der.: gráfica detallada de la proyección en el plano (y, z).

En todo caso, la curva está recorrida *antihorario* (vista desde la *punta* del vector normal $\mathbf{n}_A$) y por lo tanto las orientaciones son compatibles. Es como si el vector normal $\mathbf{n}_A$ "saliera" del plano (y, z) de la figura 6 (der.), esto pasa porque la primer componente del vector normal ($n_1 = 2u$) es *positiva* para todo punto sobre la curva. Como la *proyección* en (y, z) de la curva se recorre *antihorario* entonces la orientación correcta queda determinada por el vector normal con primer componente *positiva*.

Tudo bem tudo legal, planteamos entonces el teorema de Stokes:

$$\int_{C^+} \mathbf{F} = \int_A \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \tag{15}$$

El rotor, evaluado sobre los puntos de la superficie A, se calcula a partir de las expresiones (12) y (13):

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})\Big(\mathbf{S}(u,v)\Big) = -\hat{\mathbf{I}} + \operatorname{sen}\left(u^4\right)\hat{\mathbf{J}} + (2u+v)\hat{\mathbf{K}}$$

recordando que (14) define el vector normal $\mathbf{n}_A(u,v) = \mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v$ de la superficie A, el producto escalar con el rotor queda

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})\Big(\mathbf{S}(u,v)\Big) \cdot \mathbf{n}_A(u,v) = -2u + 2u + v = v$$

donde por (13), la región de integración es $\mathcal{D}_A$. Recordemos que

$$\mathcal{D}_A = \left\{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : (u-2)^2 + v^2 \leq 4\right\}$$

con lo cual (15) queda

$$\int_{C^+} \mathbf{F} = \iint_{\mathcal{D}_A} \operatorname{rot}(\mathbf{F})\Big(\mathbf{S}(u,v)\Big) \cdot \mathbf{n}_A(u,v)du\,dv = \iint_{\mathcal{D}_A} v\,du\,dv \tag{16}$$

podemos realizar el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} u = \rho\cos\phi + 2 \\ v = \rho\operatorname{sen}\phi \end{cases} \qquad \rho > 0 \ \wedge \ 0 < \phi < 2\pi$$

y la desigualdad que define $\mathcal{D}_A$ queda

$$\begin{aligned} (\rho\cos\phi + \cancel{2} - \cancel{2})^2 + (\rho\operatorname{sen}\phi)^2 &\leq 4 \\ \rho^2\cos^2\phi + \rho^2\operatorname{sen}^2\phi &\leq 4 \\ \rho^2\left(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi\right) &\leq 4 \\ \rho^2 &\leq 4 \\ \rho &\leq 2 \end{aligned}$$

luego $0 < \rho \leq 2 \ \wedge \ 0 < \phi < 2\pi$ y como $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\rho,\phi)} = \rho$ entonces (16) queda

$$\int_{C^+} \mathbf{F} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\operatorname{sen}\phi \cdot \rho\,d\rho\,d\phi = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\phi\right)}_{0}\left(\int_0^2 \rho^2\,d\rho\right) = 0$$

entonces la integral curvilínea *no depende* de la orientación de la curva C, y podemos afirmar con seguridad que la RESPUESTA es:

$$\int_C \mathbf{F} = 0.$$

Observación importante: así como la integral del problema anterior *dependía* de la orientación elegida y era relevante mencionarlo, aquí la cuestión está en señalar la *independencia* de la orientación causada por la *nulidad* de la integral curvilínea pedida.

Problema 4. Sea S una superficie *cerrada*, *simple* y orientable en $\mathbf{R}^3$ que admite la siguiente parametrización $\mathbf{S}(u,v) \in C^1(D)$

$$\mathbf{S}(u,v) = \big(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)\big), \ (u,v) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

de modo tal que la orientación positiva es $\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v = \mathbf{n}^+$
i) Probar que

$$\int_D Z(u,v)\,(X_uY_v - X_vY_u)\,du\,dv = \mathrm{vol}(V)$$

Solución: Tenemos una igualdad. En su lado derecho se encuentra el volumen y en su lado izquierdo una integral de superficie. Por lo tanto sería necesario trabajar con Gauss y específicamente con un campo de divergencia 1. Existen infinitos campos con esa divergencia, pero al analizar la parte izquierda de la igualdad se halla que sólo sobrevive el tercer componente de la integral de línea, por lo tanto tendría que ser el campo $(0,0,z)$, que cumple ambas condiciones. Aplicamos el teorema de Gauss al campo $(0,0,z)$:

$$\begin{aligned}
\int_{S^+} (0,0,z) &= \iiint_V \mathrm{div}(0,0,z)\,dV \\
\int_D \big(0,0,Z(u,v)\big)\cdot \mathbf{n}^+\,du\,dv &= \iiint_V 1\,dV \\
\int_D \big(0,0,Z(u,v)\big)\cdot \big(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\big) &= \iiint_V dV \\
\int_D \big(0,0,Z(u,v)\big)\cdot \big(\ldots,\ldots,X_uY_v - X_vY_u\big) &= \mathrm{vol}(V) \\
\int_D Z(u,v)\,(X_uY_v - X_vY_u)\,du\,dv &= \mathrm{vol}(V).
\end{aligned}$$

ii) Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \alpha x\hat{\mathbf{I}} + \beta y\hat{\mathbf{J}}$$

hallar la condición que deben cumplir las constantes $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ para que se cumpla la siguiente igualdad :

$$\int_D Z(u,v)\,(X_u Y_v - X_v Y_u)\,du\,dv = \int_{S^+} \mathbf{F}$$

<u>Solución:</u> sustituyendo la fórmula del inciso anterior tenemos

$$\mathrm{vol}(V) = \int_{S^+} \mathbf{F}$$

entonces nuevamente por el teorema de Gauss, se deduce que tiene que ser

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 1 \iff \alpha + \beta = 1.$$

iii) Aplicar el inciso i) a la superficie del *toro*

$$\mathbf{S}(u,v) = \big((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\,\mathrm{sen}\,u, r\,\mathrm{sen}\,v\big) \text{ para } (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$$

<u>Solución:</u> calculamos

$$\begin{aligned} X_u &= -(R + r\cos v)\,\mathrm{sen}\,u & \qquad X_v &= -r\,\mathrm{sen}\,v\cos u \\ Y_u &= (R + r\cos v)\cos u & \qquad Y_v &= -r\,\mathrm{sen}\,v\,\mathrm{sen}\,u \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} X_u Y_v - X_v Y_u &= (R + r\cos v) r\,\mathrm{sen}^2 u\,\mathrm{sen}\,v + (R + r\cos v) r\cos^2 u\,\mathrm{sen}\,v = \\ &= (R + r\cos v) r\left(\mathrm{sen}^2 u + \cos^2 u\right)\mathrm{sen}\,v = (R + r\cos v) r\,\mathrm{sen}\,v \end{aligned}$$

y como $Z(u,v) = r\,\mathrm{sen}\,v,\ D = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$, aplicando i) queda

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(V) &= \int_D Z(u,v)\,(X_u Y_v - X_v Y_u)\,du\,dv = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (r\,\mathrm{sen}\,v)(R + r\cos v) r\,\mathrm{sen}\,v\,du\,dv = \\ &= r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R + r\cos v)\,\mathrm{sen}^2 v\,du\,dv = \\ &= r^2 \left(\int_0^{2\pi} du\right)\left(\int_0^{2\pi} (R + r\cos v)\,\mathrm{sen}^2 v\,dv\right) = \\ &= 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \left(R\,\mathrm{sen}^2 v + r\cos v\,\mathrm{sen}^2 v\right)\,dv \end{aligned}$$

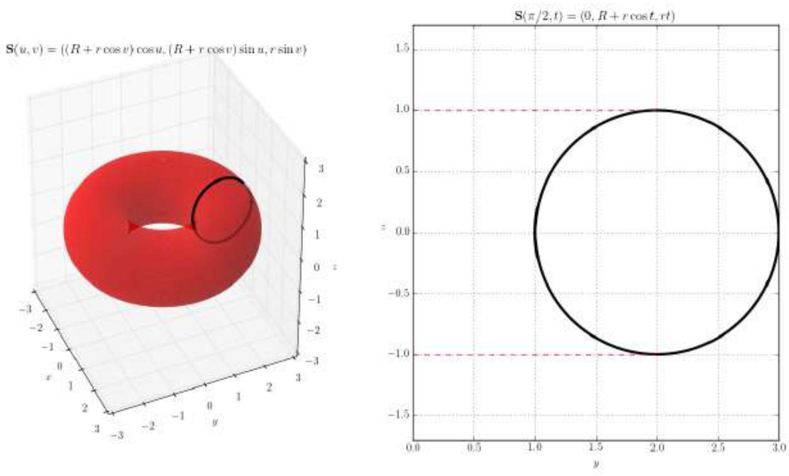

Figura 7: Gráfica tridimensional de la superficie del toro (izq) e intersección con el semiplano (y, z), para $y \geq 0$ (der).

pero

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 v \, dv = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Big(1 + \cos(2v)\Big) dv = \frac{1}{2}\Big(2\pi + 0\Big) = \pi;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos v \operatorname{sen}^2 v \, dv = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 v \Big|_0^{2\pi} = 0$$

entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(V) &= 2\pi r^2 \left(R \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 v \, dv + r \int_0^{2\pi} \cos v \operatorname{sen}^2 v \, dv \right) = \\ &= 2\pi r^2 \left(R\pi + r0 \right) = 2\pi^2 r^2 R.\end{aligned}$$

Fin. Esperamos que les sea útil.

Fede y Santi.