MATEMATICO II - INGENIERIA - Segundo Parcial - 23 de Junio de 2016.

NOMBRE..Comisión................................

Problema 1. (20)

a) Calcular la siguiente integral doble :

$$\iint_D (x-7y)\,\mathrm{e}^{(x-7y)(5x+y)}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y \ ; \ D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : \tfrac{1}{7}x-\tfrac{1}{7}\le y\le \tfrac{1}{7}x \ \wedge \ -5x\le y\le 1-5x\right\}$$

b) Usar a) para probar que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1}{x^2}\right)\mathsf{d}x = e-2$

....

Problema 2. (20) Calcular el volumen (finito) del sólido $V\subset\mathbf{R}^3$ que está limitado por las superficies siguientes

$$S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : (x-2z)^2+y^2-4z=0\right\} \qquad S_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x=0\right\}$$

....

Problema 3. (20) Hallar el valor de la siguiente integral curvilinea

$$\int_{C^+} \frac{-y}{x^2+y^2}\mathsf{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathsf{d}y \ \ \text{donde } C=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

....

Ejercicio 4. (20) Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z)=f(y)\,\check{\mathbf{I}}+2xf(y)\,\check{\mathbf{J}}+f(z)\,\check{\mathbf{K}}$$

donde $f(y)$ es una función escalar derivable, y C_1, C_2 son dos curvas en el plano cuyas respectivas parametrizaciones son

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1 &= \left(a\cos 2\pi t\ ,\ b\sin 2\pi t\ ,\ t\right) \quad 0\le t\le 1\\ \mathbf{c}_2 &= \left(a\cos 2\pi t\ ,\ 3b\sin 2\pi t\ ,\ t^2\right) \quad 0\le t\le 1\end{aligned}$$

a) Hallar la expresión explícita de $f(y)$ para que se cumpla la siguiente igualdad :

$$\int_{C_1^+}\boldsymbol{F}=\int_{C_2^+}\boldsymbol{F}$$

b) Hallar el valor de $\displaystyle\int_{C_1^+}\boldsymbol{F}$

....

Ejercicio 5. (20) Dados los siguientes campos vectoriales

$$\mathbf{F}_1(x,y,z)=\left(xz-\tfrac{1}{2}z^2\right)\check{\mathbf{I}}+(yz+yx)\,\check{\mathbf{J}}+\left(\sin z^2\right)\check{\mathbf{K}}$$

$$\mathbf{F}_2(x,y,z)=(x-y-z)\,\check{\mathbf{I}}+\left(x^n e^{\sin(z)}+z\right)\check{\mathbf{J}}+(z+y-x)\,\check{\mathbf{K}}\ ,\quad (n\in N)$$

calcular las siguientes integrales

i) $\displaystyle\int_{C^+}\mathbf{F}_1$ donde $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2=2 \ \wedge \ x+y+z=0\right\}$

ii) $\displaystyle\int_{S_0^+}\mathbf{F}_2$ donde $S_0=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2=r^2 \ \wedge \ x-z\le 0\right\}$

Resuelto

Agradecimientos a Juan Manuel Grosso, Francisco Rogé y Nahuel Passano por sus tan respetuosas y precisas correcciones.

Problema 1 a) Se muestra una gráfica de la región

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \tfrac{1}{7}x - \tfrac{1}{7} \le y \le \tfrac{1}{7}x \ \wedge \ -5x \le y \le 1 - 5x\right\}$$

en la Figura 1. Como el integrando es la función

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = (x - 7y)e^{(x-7y)(5x+y)}$$

resulta de especial importancia observar que la región puede expresarse de la siguiente manera.

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x - 7y \le 1 \ \wedge \ 0 \le 5x + y \le 1\right\}$$

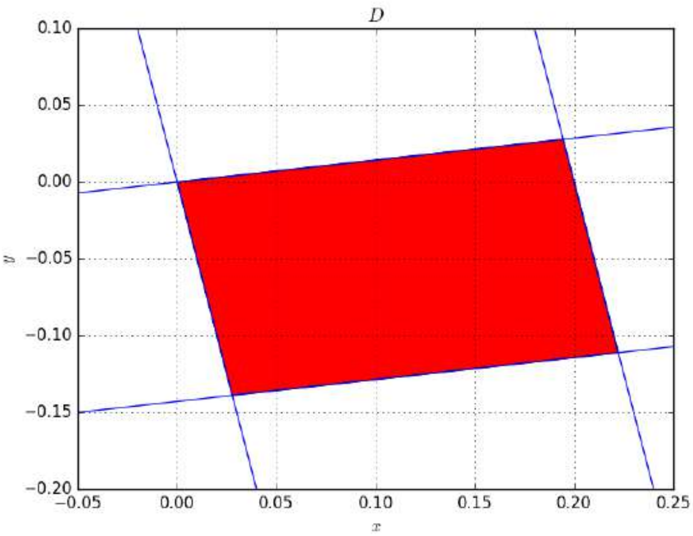

Figura 1: Gráfica de la región D.

De este modo, la transformación lineal necesaria para simplificar las cuentas salta a la vista casi de forma inmediata, definimos

$$T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad T^{-1}(x, y) = (x - 7y, 5x + y)$$

designando $(u, v) = T^{-1}(x, y)$ la definición de la transformación nos permite expresarla en forma matricial así

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{36} & \frac{7}{36} \\ -\frac{5}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{T(u,v)}$$

con lo cual

$$\left|\det\left[T'(u,v)\right]\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{36} & \frac{7}{36} \\ -\frac{5}{36} & \frac{1}{36} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{36}$$

Además

$$T^{-1}(D) = \left\{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le u \le 1 \ \wedge \ 0 \le u \le 1\right\} = [0,1] \times [0,1]$$

región de la cual no voy a hacer la gráfica (¿¿hace falta que les dibuje un cuadrado???), luego

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{T^{-1}(D)} f\Big(T(u,v)\Big)\,\left|\det\left[T'(u,v)\right]\right|\,du\,dv = \\ &= \tfrac{1}{36}\int_0^1\int_0^1 ue^{uv}\,du\,dv. \end{aligned}$$

Se aplica el teorema de Fubini para calcular la integral. Si la hacemos en el orden en que quedó planteada

$$I = \tfrac{1}{36}\int_0^1 \left(\int_0^1 ue^{uv}\,du\right)\,dv = \tfrac{1}{36}\int_0^1 \left(\frac{ve^v - e^v + 1}{v^2}\right)\,dv$$

queda una integral impropia, entonces

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\tfrac{1}{36}\int_\varepsilon^1 \left(\frac{ve^v - e^v + 1}{v^2}\right)\,dv\right\} = \\ &= \tfrac{1}{36}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\frac{e^v - 1}{v}\bigg|_\varepsilon^1\right\} = \tfrac{1}{36}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\frac{e-1}{1} - \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right\} = \\ &= \tfrac{1}{36}\left\{e - 1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right\} = \tfrac{1}{36}\left\{e - 1 - 1\right\} = \tfrac{1}{36}\{e-2\} \end{aligned} \tag{1}$$

Notemos que basta multiplicar la ecuación (1) por 36 miembro a miembro, para obtener la integral pedida en el punto b).

Quizás no muchos puedan encontrar esa primitiva tan fácilmente y resolver la impropia, así que abordaremos el problema de otra forma. Como el conjunto $T^{-1}(D)$ es un cuadrado, el teorema de Fubini nos permite permutar libremente el orden de integración sin ningún compromiso.

$$I = \tfrac{1}{36}\int_0^1 \left(\int_0^1 ue^{uv}\,dv\right)\,du = \tfrac{1}{36}\int_0^1 \left(e^u - 1\right)\,du = \tfrac{1}{36}\,(e-2) \tag{2}$$

¡Listo! Evitamos así tanto la impropia, como la primitiva mística.

b) Cambiamos v por x en cualquiera de las relaciones (1) y (2),

$$\int_0^1 \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \right) dx = 36I = 36 \cdot \tfrac{1}{36}(e-2) = e-2$$

Pan comido.

Problema 2. Este sólido es difícil de ver en (x, y, z). Para poder verlo primero definiremos una transformación T, que nos permita expresar la superficie en el espacio (u, v, w), de manera que todo quede más sencillo.

Definiendo dicha transformación a partir de la inversa queda

$$T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad T^{-1}(x, y, z) = (x - 2z, y, 4z)$$

designando $(u, v, w) = T^{-1}(x, y, z)$ se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u + \frac{1}{2}w \\ v \\ \frac{1}{4}w \end{bmatrix}}_{T(u,v,w)}$$

con lo cual las superficies que delimitan al sólido son

$$\begin{aligned} T^{-1}(S_1) &= \left\{ (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u^2 + v^2 - w = 0 \right\} \\ T^{-1}(S_2) &= \left\{ (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u + \tfrac{1}{2}w = 0 \right\} \end{aligned}$$

y esta situación sí se puede visualizar, se trata del sólido delimitado por un paraboloide $T^{-1}(S_1)$ y un plano $T^{-1}(S_2)$. Se muestran las gráficas para cada espacio en la Figura 2.

En definitiva, sea V el sólido en (x, y, z) delimitado por S_1 y S_2, tenemos

$$T^{-1}(V) = \left\{ (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u^2 + v^2 \leq w \leq -2u \right\}$$

La intersección entre las dos superficies da como resultado la curva plana

$$\begin{aligned} T^{-1}(S_1) \cap T^{-1}(S_2) &= \left\{ (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u^2 + v^2 - w = 0 \ \wedge \ u + \tfrac{1}{2}w = 0 \right\} \\ &= \left\{ (u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : (u+1)^2 + v^2 = 1 \ \wedge \ w = -2u \right\} \end{aligned}$$

cuya proyección sobre el plano (u, v) nos da la frontera de la región sobre la cual tenemos que calcular la integral.

$$D = \left\{ (u, v) \in \mathbf{R}^2 : (u+1)^2 + v^2 \leq 1 \right\}$$

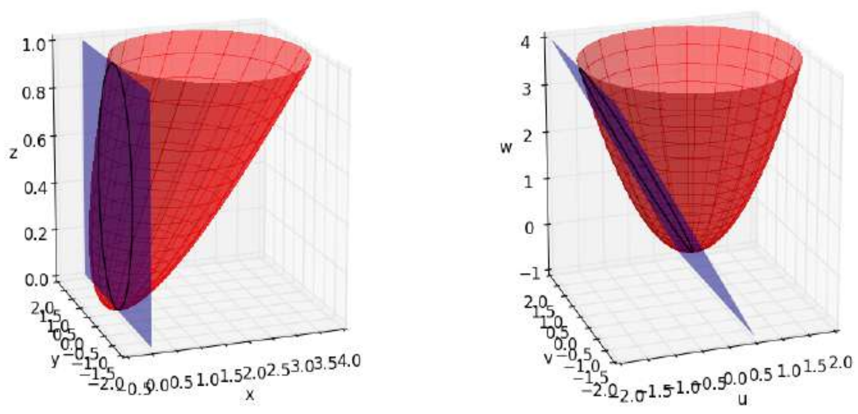

Figura 2: Gráficas de las superficies y la curvas intersección en los espacios (x, y, z) y (u, v, w). De las mismas se desprende que T tuerce al espacio, manteniendo al eje y invariante.

No olvidemos el determinante de la transformación

$$\left|\det\left[T'(u,v,w)\right]\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

Con todo esto, planteamos

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(V) &= \iiint\limits_V dV = \iiint\limits_{T^{-1}(V)} \left|\det\left[T'(u,v,w)\right]\right| \, du\, dv\, dw = \\ &= \iint\limits_D \left[\int_{u^2+v^2}^{-2u} \frac{1}{4}\, dw\right] du\, dv = \frac{1}{4}\iint\limits_D \left[(-2u) - \left(u^2+v^2\right)\right] du\, dv = \\ &= \frac{1}{4}\iint\limits_D \left[1-(u+1)^2 - v^2\right] du\, dv \end{aligned}$$

Coordenadas polares + traslación:

$$S : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad S(\rho, \phi) = (\rho\cos\phi - 1, \rho\sin\phi)$$

como $\left|\det\left[S'(\rho,\phi)\right]\right| = \rho$ y $S^{-1}(D) = (0, 1] \times (0, 2\pi)$ queda

$$\mathrm{vol}(V) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[1-\rho^2\right]\rho\, d\rho\, d\phi = \frac{\pi}{8}$$

Problema 3 Analizamos tres casos.

<u>CASO I</u>: $a < 1$, en este caso el campo queda definido sobre la región simplemente conexa $\text{int}(C)$. Es conservativo sobre ella, pues

$$D_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - D_y\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(-1)\,(x^2+y^2)-(-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \tag{3}$$

por lo tanto

$$\int_{C+} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$$

<u>CASO II</u>: $a = 1$, la singularidad del campo $(0,0)$ yace sobre la curva.

El análisis de este caso es muy difícil, en el examen bastaba con explicar la situación que impone la condición $a = 1$. No obstante, dejo en un apartado la resolución, para el que desee leerlo.

<u>CASO III:</u> $a > 1$, en este caso la curva *encierra* la singularidad, y por lo tanto no podemos aplicar directamente el teorema de Green.

Lo que sí podemos hacer es construir una circunferencia de radio R muy chiquitito, $x^2+y^2 = R^2$ (o muy grande), lo suficiente como para que no haya intersección con la elipse C.

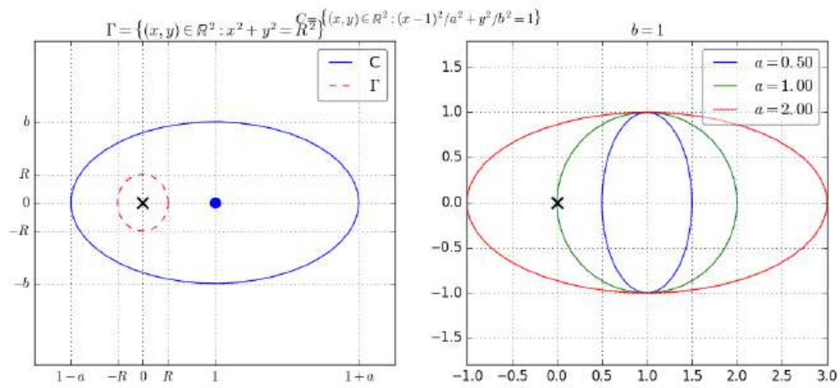

Figura 3: Gráficas de (izquierda) la circunferencia creada para saltear el punto de conflicto y (derecha) la elipse C para distintos valores de a. Se representa al punto de conflicto con una cruz $\times$.

Aplicamos la extensión del teorema de Green, sea Γ^- la circunferencia que acabamos de crear (ver Figura 3), recorrida en sentido horario, teniendo en cuenta (3) se deduce

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C^+\cup\Gamma^-} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy &= 0\\
\int\limits_{C^+} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy &= \int\limits_{\Gamma^+} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy
\end{aligned}$$

La razón por la cual Γ es una circunferencia y no un cuadrado por ejemplo, es que el campo queda RE FÁCIL con la curva elegida. En la fórmula obtenida se ve que es muy conveniente construir una parametrización positiva de Γ, así lo hacemos:

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

entonces

$$\int\limits_{\Gamma^+} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{(-R\sin t)(-R\sin t)}{R^2} + \frac{(R\cos t)(R\cos t)}{R^2} \right\} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Este es el valor de la integral pedida. Más bello, imposible.

Ejercicio 4. a) Nos piden que la integral no dependa del camino, una condición suficiente para ello es que rot($\mathbf{F}$) = (0,0,0).

Calculando el rotor se ve que tiene que cumplirse $2f(y) - f'(y) = 0$, la solución general es

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = 2 \iff (\ln|f(y)|)' = (2y)' \iff \ln|f(y)| = 2y + c$$

o bien $f(y) = Ce^{2y}$, siendo $C = e^c$, lo cual es equivalente. Para todas estas f el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(Ce^{2y}, 2Cxe^{2y}, Ce^{2z}\right)$$

es conservativo, y por lo tanto cumple que

$$\int_{C_1^+} \mathbf{F} = \int_{C_2^+} \mathbf{F}$$

pues C_1 y C_2 son trayectorias con iguales puntos de partida y llegada,

$$\mathbf{c}_1(0) = (a, 0, 0) = \mathbf{c}_2(0), \quad \mathbf{c}_1(1) = (a, 0, 1) = \mathbf{c}_2(1)$$

b) Como $\mathbf{F}$ es conservativo, es un campo de gradientes, lo cual implica que existe una función escalar $\phi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \int_0^x \left(Ce^{2y}\right)\, dt + \int_0^y \left(2C\cdot 0\cdot e^{2t}\right)\, dt + \int_0^z \left(Ce^{2t}\right)\, dt + D = \\
&= Cxe^{2y} + \tfrac{1}{2}Ce^{2z} + D
\end{aligned}$$

luego, en virtud del teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{C_1^+} \mathbf{F} &= \int_{(a,0,0)}^{(a,0,1)} \phi'(x,y,z) = \phi(a,0,1) - \phi(a,0,0) = \\
&= \left(Ca + \tfrac{1}{2}Ce^2\right) - \left(Ca + \tfrac{1}{2}C\right) = \tfrac{1}{2}C\left(e^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5. i) Probamos que la curva es cerrada.

$$z = -x - y \Longrightarrow x^2 + y^2 + (-x-y)^2 = 2 \iff x^2 + xy + y^2 = 1$$

La curva intersección C es una elipse rotada, que está contenida en el plano $x + y + z = 0$.

Por si no me creen que es una elipse...

$$x^2 + xy + y^2 = 1 \iff \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& \cos t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t \\ y &=& \frac{2}{\sqrt{3}}\sin t \end{array} \right.$$

La curva es cerrada y simple: existe al menos una superficie que la tiene como borde. A simple vista, hay tres superficies posibles, las cuales se deducen de la misma definición de C como curva intersección. En un gran esfuerzo de producción, se confeccionó la gráfica que se exhibe en la Figura 4, como para que puedan *ver* esta situación.

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 2 \wedge x + y + z = 0\right\} = \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + xy + y^2 \le 1 \wedge z = -x - y\right\} \\
B &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \wedge x + y + z \le 0\right\} = \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \wedge z \le -x - y\right\} \\
\Gamma &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \wedge z \ge -x - y\right\}
\end{aligned}$$

Nos guardamos bajo la manga los vectores normales a las superficies, hay básicamente dos distintos

$$\mathbf{n}_A = (1,1,1) \tag{4}$$

$$\mathbf{n}_B = \mathbf{n}_\Gamma = (2x, 2y, 2z) \tag{5}$$

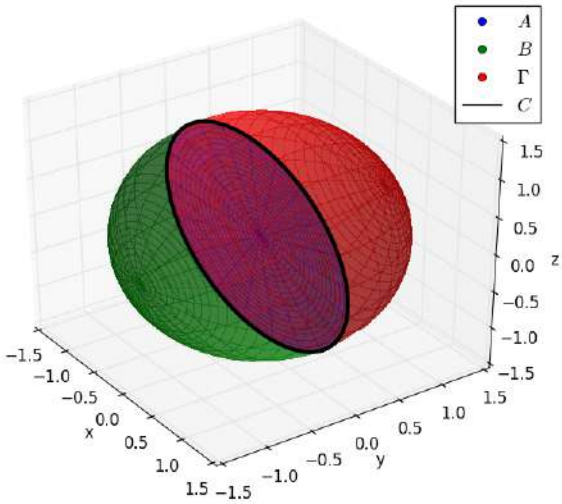

Figura 4: Gráfica de la curva C, junto con distintas superficies que la tienen como frontera.

Elegimos uno a partir del

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) = (-y, x - z, y) \tag{6}$$

¿se ve lo que pasa? Calculando el producto escalar con (5) y (6) queda

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{n}_B = (2x)(-y) + (2y)(x - z) + (2z)(y) = -2xy + 2xy - 2yz + 2yz = 0$$

¡o sea que listo el pollo! Ni siquiera tenemos que preocuparnos por la región de integración. Aplicando el teorema de Stokes, queda

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \mathbf{F}_1 &= \int_B \operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) = \int_B \operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) \cdot \frac{\mathbf{n}_B}{\|\mathbf{n}_B\|}\, dB = \\ &= \int_B \underbrace{(\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{n}_B)}_{0} \frac{1}{\|\mathbf{n}_B\|}\, dB = 0. \end{aligned}$$

ii) La superficie S_0 es abierta, su frontera es la curva

$$\begin{aligned} \partial S_0 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ \wedge \ x - z = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x^2 + y^2 = r^2 \ \wedge \ z = x\right\} = \\ &= \left\{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} r \cos t, r \sin t, \tfrac{1}{\sqrt{2}} r \cos t\right) : 0 \leq t \leq 2\pi\right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto no podemos aplicar el teorema de la divergencia, a menos que construyamos la tapa que permite cerrar a la superficie. Dicha tapa no es otra que $T = \mathrm{int}(\partial S_0) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x^2 + y^2 \leq r^2 \ \wedge \ z = x\}$.

Ahora sí, la superficie $S_0 \cup T$ es cerrada y delimita un sólido, que llamaremos $V = \mathrm{int}(S_0 \cup T)$. El teorema de Gauss ahora SÍ puede aplicarse:

$$\int\limits_{(S_0 \cup T)^+} \mathbf{F}_2 = \iiint\limits_V \mathrm{div}(\mathbf{F}_2)\, dV$$

La divergencia es $\mathrm{div}(\mathbf{F}_2) = 2$, con lo cual la fórmula se reduce a

$$\int\limits_{(S_0 \cup T)^+} \mathbf{F}_2 = 2\,\mathrm{vol}(V) \tag{7}$$

El sólido V consiste en el interior de una esfera de radio r partida exactamente a la mitad, pues el plano que la corta pasa por su centro. Luego

$$\mathrm{vol}(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

por lo tanto (7) queda

$$\int\limits_{(S_0 \cup T)^+} \mathbf{F}_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

para calcular la integral pedida acudimos a la propiedad aditiva de la integral, queda

$$\int\limits_{S_0^+} \mathbf{F}_2 + \int\limits_T \mathbf{F}_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \iff \int\limits_{S_0^+} \mathbf{F}_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 - \int\limits_T \mathbf{F}_2 \tag{8}$$

Atención con el vector normal de la tapa T. Este debe apuntar hacia afuera de la superficie $S_0 \cup T$, para que se lo imaginen, es como que el vector no tiene que "pinchar" el sólido V, cuando su punto base se encuentra sobre la referida superficie. Es como si tuviera un globo y apoyara un alfiler sobre él, en esta analogía el punto base del vector normal vendría a ser la base del alfiler (por donde se lo agarra) y el extremo, el filo, que es lo que pincha. Si yo apoyo el alfiler sobre el globo, cuando el alfiler apunta hacia el interior del globo, el globo revienta, y en este caso no me interesa que reviente nada.

Hay dos vectores normales posibles para T, en cartesianas por ejemplo son el $\mathbf{n}_T = (1, 0, -1)$ y su opuesto. Como de las definiciones de S_0 y T, se deduce que la tapa T está cerrando a la esfera S_0 *por debajo*, el vector normal correcto para los cálculos es el $\mathbf{n}_T = (1, 0, -1)$ (apunta para abajo).

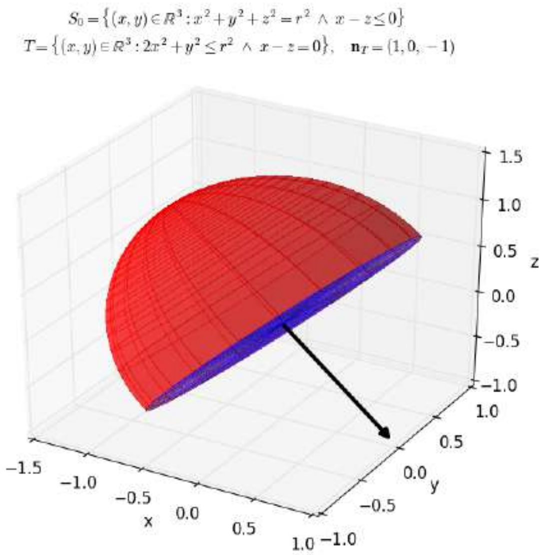

Figura 5: Gráfica de las superficies y vector normal, apuntando hacia afuera.

Por si se si hacen lío, les dejo la Figura 5 para que se "orienten", cual vector normal a una superficie.

Entendido el proceso de elección del vector normal, pasamos a calcular la integral, sea $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq r^2\}$,

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{F}_2 &= \iint_D \mathbf{F}_2(x, y, x) \cdot \mathbf{n}_T \, dx \, dy = \\ &= \iint_D \big(-y, x^n e^{\sin x} + x, y\big) \cdot (1, 0, -1) \, dx \, dy = \iint_D (-2y) \, dx \, dy = \\ &= -2 \iint_D y \, dx \, dy \end{aligned}$$

Coordenadas polares + homotecia:

$$T : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad T(\rho, \phi) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} \rho \cos \phi, \rho \sin \phi\right)$$

queda $\big|\det\big[T'(\rho, \phi)\big]\big| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho$ y $T^{-1}(D) = (0, r] \times (0, 2\pi)$, con lo cual

$$\int_T \mathbf{F}_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi = -\sqrt{2} \left(\int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi\right) \left(\int_0^1 \rho^2 \, d\rho\right) = 0$$

finalmente, introduciendo el resultado en (8), se tiene

$$\int\limits_{S_0^+} \mathbf{F}_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Espero que les sirva.

Fede.

A todo aquel que le interese ampliar: Una parametrización de la elipse C del **Problema 3** para $a = 1$ es

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = (\cos t + 1, b \sin t)$$

pero $\mathbf{c}(\pi) = (0, 0)$ ¡este es el punto de indefinición! En rigor, deberíamos tomar a la curva como unión de dos arcos $C = C_1 \cup C_2$ tales que

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \pi - \varepsilon_1], \quad \operatorname{Im}(\mathbf{c}) = C_1, \\ \forall t \in [\pi + \varepsilon_2, 2\pi], \quad \operatorname{Im}(\mathbf{c}) = C_2, \end{aligned}$$

y analizar la convergencia de la integral

$$\int_{C^+} \mathbf{F} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_{C_1} \mathbf{F} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{C_2} \mathbf{F}$$

donde se denota al campo como $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$. Esto es necesario, porque no sabemos lo que sucede con la integral en el punto $(0, 0)$.

Calculamos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \Big|_{\substack{x=\cos t+1 \\ y=b\sin t}} &= \cos^2 t + 2\cos t + 1 + b^2 \sin^2 t^2 = \\ &= \left(1 - b^2\right) \cos^2 t + 2\cos t + \left(1 + b^2\right) \end{aligned}$$

es un polinomio de segundo grado en $\cos t$, desgnando $u = \cos t$, $P(u)$ al polinomio, entonces

$$P(u) = \left(1 - b^2\right) u^2 + 2u + \left(1 + b^2\right)$$

sabemos que una raíz es $t = \pi \Longrightarrow u = \cos(\pi) = -1$ es raíz, por lo tanto es válida la factorización siguente por la regla de Ruffini:

$$P(u) = (u + 1) \left[\left(1 - b^2\right) u + \left(1 + b^2\right) \right]$$

cuestión que queda

$$\mathbf{F}\left[\mathbf{c}(t)\right] = \left(\frac{-b \sin t}{P(\cos t)}, \frac{\cos t + 1}{P(\cos t)} \right)$$

como $\mathbf{c}'(t) = (-\sin t, b\cos t)$ se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\left[\mathbf{c}(t)\right] \cdot \mathbf{c}'(t) &= \frac{b\sin^2 t + b\cos^2 t + b\cos t}{P(\cos t)} = \frac{b \cdot (1 + \cos t)}{P(\cos t)} = \\ &= \frac{b}{(1 - b^2)\cos t + (1 + b^2)} \end{aligned}$$

La primitiva de $\frac{b}{(1-b^2)\cos t+(1+b^2)}$ puede calcularse a partir de la sustitución trigonométrica $z=\tan\left(\frac{1}{2}t\right)$, porque

$$t=2\arctan z \Longrightarrow dt=\frac{2}{1+z^2}\,dz \;\wedge\; \cos t=\frac{1-\tan^2\left(\frac{1}{2}t\right)}{1+\tan^2\left(\frac{1}{2}t\right)}=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

con lo cual queda la integral de una función racional de z:

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{F}\left[\mathbf{c}(t)\right]\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt &= \int \frac{b}{(1-b^2)\cos t+(1+b^2)}\,dt= \\
&= b\int \frac{\left(\frac{2}{1+z^2}\right)}{(1-b^2)\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)+(1+b^2)}\,dz= \\
&= b\int \frac{2}{(1-b^2)(1-z^2)+(1+b^2)(1+z^2)}\,dz= \\
&= b\int \frac{2}{2+2b^2z^2}\,dz=b\int\frac{1}{1+(bz)^2}\,dz= \\
&= b\arctan(bz)+C=b\arctan\left[b\tan\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right]+C.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo en las integrales sobre C_1 y C_2 tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{C_1}\mathbf{F} &= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_0^{\pi-\varepsilon_1}\mathbf{F}\left[\mathbf{c}(t)\right]\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt= \\
&= b\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\arctan\left[b\tan\left(\tfrac{1}{2}(\pi-\varepsilon_1)\right)\right]=\frac{1}{2}b\pi
\end{aligned}$$

análogamente se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{C_2}\mathbf{F} &= \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{\pi+\varepsilon_2}^{2\pi}\mathbf{F}\left[\mathbf{c}(t)\right]\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt= \\
&= -b\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\arctan\left[b\tan\left(\tfrac{1}{2}(\pi+\varepsilon_2)\right)\right]=\frac{1}{2}b\pi
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{C^+}\mathbf{F}=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{C_1}\mathbf{F}+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{C_2}\mathbf{F}=b\pi.$$

Contra todo lo esperado ¡¡la integral converge!!