

14/06/2023

TEMA 3

Hoja 1 de 4

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guarani):	DOCENTE (nombre y apellido):
E-MAIL:	
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Hallar los intervalos de crecimiento de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$

Para analizar el crecimiento de una función es necesario determinar previamente su dominio. En este caso la función es una función polinómica por lo tanto: $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta que en los intervalos de crecimiento de una función, su derivada es positiva, hallamos la derivada de la función f y determinamos el conjunto de positividad de f' .

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = x^2 + 2x - 3$$

Para determinar los puntos críticos hallamos los ceros de f' .

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = -3$$

Los puntos críticos de la función son: $x_1 = 1 \wedge x_2 = -3$ y $f'(x) = (x - 1)(x + 3)$

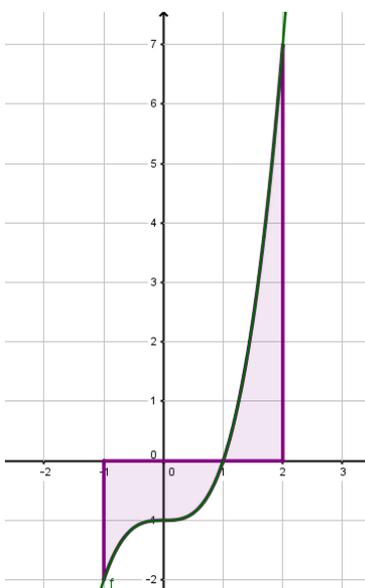
Analizamos los intervalos determinados en su dominio:

$(-\infty; -3)$	$(-3; 1)$	$(1; +\infty)$
$x = -4$ $f'(-4) > 0$ La función es creciente	$x = 0$ $f'(0) < 0$ La función es decreciente	$x = 2$ $f'(2) > 0$ La función es creciente

Por lo tanto:

La función f es creciente en los intervalos: $(-\infty; -3)$ y $(1; +\infty)$

2. Calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = x^3 - 1$, $x = -1$ y $x = 2$.



Como el área a calcular está formada por una región por debajo del eje de abscisas y otra por encima del mismo, debemos determinar el valor de x donde la gráfica corta dicho eje. Es decir, determinar el valor de x para el cual $f(x) = 0$.

Verificamos que $x = 1$ es el punto de intersección de la gráfica con el eje de abscisas, ya que $f(1) = 1^3 - 1 = 0$

Entonces el área a calcular es:

$$A = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

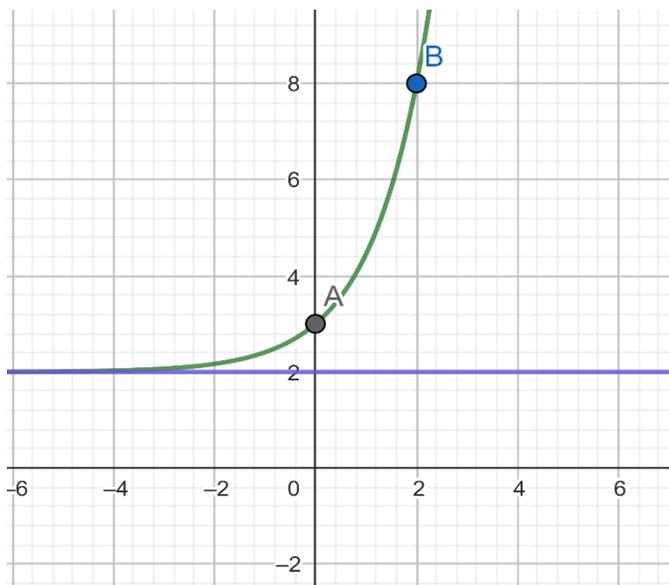
Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (x^3 - 1) dx \Rightarrow \int f(x) dx = \int x^3 dx - \int dx \\ \int f(x) dx &= \frac{1}{4} x^4 - x + C \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} A &= - \left(\frac{1}{4} x^4 - x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{4} x^4 - x \right) \Big|_1^2 \\ A &= - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - (-1) \right) \right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 1 \right) \right) \\ A &= - \left(-\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \right) + \left(2 + \frac{3}{4} \right) \Rightarrow A = 2 + \frac{11}{4} \Rightarrow A = \frac{19}{4} \end{aligned}$$

3. La función exponencial de la forma $f(x) = k \cdot a^x + b$, con k, a y b números reales, corta al eje y en el punto $A = (0; 3)$; pasa por el punto B de coordenadas $(2; 8)$ y tiene una asíntota horizontal en $y = 2$. Observar el gráfico y determinar los valores de las constantes k, a y b .



Si observamos el gráfico podemos deducir que:

- En $y = 2$ existe una asíntota horizontal, por lo tanto $b = 2$.
- La gráfica de la función corta al eje y en el punto $(0; 3)$. Reemplazando en la ecuación, podemos hallar el valor de k :

$$\begin{aligned} 3 &= k \cdot a^0 + 2 \\ 3 - 2 &= k \cdot 1 \\ 1 &= k \rightarrow f(x) = 1 \cdot a^x + 2 \end{aligned}$$

- El punto $(2; 8)$ pertenece a la función. En consecuencia, si se reemplaza las coordenadas en la ecuación, es posible obtener el valor de a .

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot a^x + 2 \\ 8 &= 1 \cdot a^2 + 2 \\ 8 - 2 &= a^2 \\ \sqrt{6} &= |a| \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{6} \text{ descartamos la solución negativa puesto que } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

La ecuación de la función es: $f(x) = (\sqrt{6})^x + 2$

Para resolver este ejercicio resignificamos el concepto de función exponencial. Estos conceptos corresponden a la unidad de "Funciones especiales"

4. Hallar los puntos del plano donde la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ es perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{4}x$.

Debemos encontrar los puntos, de la forma $(x_0; f(x_0))$, de la curva donde la recta tangente es perpendicular a una recta dada. Sabemos que para que dos rectas sean perpendiculares sus pendientes deben ser opuestas e inversas. Por lo tanto, tenemos que hallar los puntos de la curva que tienen por recta tangente una recta con pendiente igual a 4.

Asimismo, por definición de recta tangente sabemos que:

$$f'(x_0) = 4$$

Hallamos la expresión de la derivada de $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

Para encontrar las abscisas de los puntos pedidos, planteamos:

$$\begin{aligned} 3x_0^2 - 4x_0 &= 4 \\ 3x_0^2 - 4x_0 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Luego, aplicamos la fórmula resolvente para resolver la ecuación cuadrática que quedó planteada anteriormente:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} \\ x_0 &= \frac{4 + 8}{6} = 2 \qquad x_0 = \frac{4 - 8}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Como se pide hallar los puntos del plano, debemos hallar las imágenes de los x_0 encontrados, por lo tanto:

Para $x_0 = 2$

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1$$

$$f(2) = 1 \rightarrow (2; 1)$$

Para $x_0 = -\frac{2}{3}$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{27} \rightarrow \left(-\frac{2}{3}; -\frac{5}{27}\right)$$

Para resolver este ejercicio utilizamos los contenidos de rectas, derivadas y recta tangente.