APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 30'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Expresar como intervalo o unión de intervalos, la siguiente expresión:

$$(\boldsymbol{x}-\mathbf{5})\cdot(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})<\mathbf{0}$$

Considerando que un producto es negativo cuando ambos factores son de distinto signo planteamos:

$$(\ x-5>0\ \wedge\ x+3<0)\ \vee\ (x-5<0\ \wedge x+3>0)$$

$$(\ x>5\ \wedge\ x<-3)\ \vee\ (x<5\ \wedge x>-3)$$

$$\emptyset\ \cup(-3;5)$$

Solución: $(-3;5)$

2. Dada la función cuadrática $f(x) = (2x-3)^2 - 5$ escribirla en forma canónica y hallar el vértice.

Sabiendo que la forma canónica $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ de una función cuadrática nos muestra el vértice, al reescribirla de dicha manera, conoceremos el vértice.

La forma canónica de la función dada es:

$$\boldsymbol{f(x) = (2x-3)^2 - 5}$$

$$\boldsymbol{f(x) = ((2(x - \frac{3}{2}))^2 - 5}$$

$$\boldsymbol{f(x) = 4(x - \frac{3}{2})^2 - 5}$$

Por lo que el vértice es $\boldsymbol{(\frac{3}{2}, -5)}$

3. Hallar el conjunto de positividad de la función $\boldsymbol{f(x) = x\,.\,(x+2)\,.\,(x-5)}$

Para hallar el conjunto de positividad de la siguiente función, tenemos que considerar que, al tener la forma factorizada podemos obtener fácilmente sus raíces que son $x = 0; x = -2\ y\ x = 5$

Con esto sabemos que la recta real queda dividida en los intervalos:

$$(-\infty; -2); (-2; 0); (0; 5)\ y\ (5; +\infty)$$

Tomando un valor representativo de cada intervalo, podemos analizar el signo que toma la función en cada uno de ellos.

En $(-\infty; -2)$: Tomamos $x = -3$: $f(-3) = (-3)(-3+2)(-3-5) < 0$, entonces $f(x) < 0$

En $(-2; 0)$: Tomamos $x = -1$: $f(-1) = (-1)(-1+2)(-1-5) > 0$, entonces $f(x) > 0$

En $(0; 5)$: Tomamos $x = 1$: $f(1) = (1)(1+2)(1-5) < 0$, entonces $f(x) < 0$

En $(5; +\infty)$: Tomamos $x = 6$: $f(6) = (6)(6+2)(6-5) > 0$, entonces $f(x) > 0$

Por lo tanto: $C^+ = (-2; 0) \cup (5; +\infty)$

4. Sea $f(x) = \frac{x+4}{ax-1} + 3$, hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que f tenga asíntota horizontal en $y = 2$.

Para que f tenga asíntota horizontal en $y = 2$, el límite de f(x) cuando x tiende a infinito debe ser igual a 2, es decir: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$.

Entonces, evaluamos el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{ax-1} + 3 =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{ax-1} + 3\,.\frac{ax-1}{ax-1} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4+3(ax-1)}{ax-1} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4+3ax-3}{ax-1} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+3a)x+(4-3)}{ax-1} = indeterminación\,\frac{\infty}{\infty}$$

Para resolver la indeterminación "$\frac{\infty}{\infty}$", si el grado del numerador es igual al grado del denominador, el resultado del límite será el cociente entre los coeficientes principales. Además, teniendo en cuenta que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$. Planteamos:

$$\frac{1+3a}{a} = 2$$

$$1 + 3a = 2a$$

$$3a = 2a - 1$$

$$3a - 2a = -1$$

$$a = -1$$