12/02/2025

APELLIDO:	CALIFICACIÓN:
NOMBRE:	
DNI (registrado en SIU Guaraní):	
E-MAIL:	DOCENTE (nombre y apellido):
TEL:	
AULA:	

Tabla de uso exclusivo para el docente

	1	2	3	4
Puntaje de cada ejercicio	2,50	2,50	2,50	2,50

Duración del examen: 1h 40'. Completar los datos personales con letra clara, mayúscula e imprenta.

No se aceptarán respuestas en lápiz.

1. Dada $\boldsymbol{f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 34x^2 - 30x}$, hallar todos los puntos donde el gráfico de $\boldsymbol{f}$ corta al eje x , sabiendo que $\boldsymbol{f(5) = 0}$.

De acuerdo con lo estudiado en la unidad 2, Funciones, Función Polinómica, conviene sacar factor común x para comenzar a resolver el ejercicio. Entonces,

$$f(x) = x(2x^3 - 2x^2 - 34x - 30) \quad \textbf{(1)}$$

Se sabe que $x = 5$ es una raíz de f porque $f(5) = 0$, entonces el factor de grado 3 de la expresión **(1)** es divisible por el binomio $x - 5$. Se efectúa la división aplicando la regla de Ruffini puesto que el divisor es de grado 1 con coeficiente principal igual a 1.
Resulta:

	2	-2	-34	-30
5	↓	10	40	30
	2	8	6	0

Teniendo en cuenta los coeficientes del cociente, la función f puede escribirse así:

$$f(x) = x(x - 5)(2x^2 + 8x + 6)$$

Se procede ahora a factorizar el trinomio de segundo grado. Se emplea la conocida fórmula resolvente ya estudiada y resulta:

$$f(x) = 2x(x - 5)(x + 3)(x + 1)$$

A partir de la expresión factorizada se determinan todos los puntos donde el gráfico de f corta al eje de abscisas considerando los valores de x que anulan cada factor:

$$x = 0\ ,\ x = 5,\ x = -3 \ \text{ y } \ x = -1$$

2. Hallar $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ para que $\vec{\boldsymbol{u}} = (-\boldsymbol{3}; \boldsymbol{a})$ y $\vec{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}; \boldsymbol{2}\right)$ sean perpendiculares.

Debemos encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores resulten perpendiculares. Sabemos que para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo, es decir $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Planteamos el producto para este caso y resulta:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Resolvemos el producto escalar:

$$(-3; a) \cdot \left(\frac{1}{3}; 2\right) = 0$$

$$(-3) \cdot \frac{1}{3} + a \cdot 2 = 0$$

$$-1 + 2a = 0$$

Despejamos

$$2a = 1 \leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

3. Sea $f(x) = 3 + ln(-x+2)$ determinar su dominio e imagen, y hallar la ecuación de su función inversa.

Para la resolución de este ejercicio utilizaremos los conceptos vistos del tema "Función Logarítmica"

Para calcular el dominio de una función logarítmica debemos tener en cuenta que el argumento del logaritmo no puede ser negativo ni cero. Entonces,

$$-x + 2 > 0$$

Despejando:

$$2 > x$$

Por lo tanto:

$$Dom\ f(x) = (-\infty; 2)$$

La función logarítmica no tiene ninguna restricción en la imagen por lo que:

$$Im\ f(x) = \mathbb{R}$$

Para calcular la inversa debemos intercambiar el lugar de las variables y despejar la variable y.

$$y = 3 + ln(-x+2)$$

$$x = 3 + ln(-y+2)$$

$$x - 3 = ln(-y+2)$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$e^{x-3} = -y + 2$$

$$e^{x-3} - 2 = -y$$

$$-e^{x-3} + 2 = y$$

Entonces: $f^{-1}(x) = -e^{x-3} + 2$

4. Resolver: $\boldsymbol{\int -2.\, sen\left(\frac{x-1}{2}\right)\, dx}$

Para la realización de este ejercicio se deben considerar los siguientes contenidos:

Funciones trigonométricas

Derivadas. Tabla de derivadas

Integrales; Métodos de integración: sustitución

Es posible resolver esta integral mediante el método de sustitución:

$$\int -2.\ sen\left(\frac{x-1}{2}\right)\, dx$$

Por prop. $\int a\,.\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$:

$$-2\int \operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{2}\right) dx$$

Realizamos un cambio de variable:

$$u = \frac{x-1}{2} \qquad (1)$$

$$u = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$du = \frac{1}{2}dx$$

$$2\,du = dx \qquad (2)$$

Reemplazando (1) y (2) en la integral:

$$-2\int \operatorname{sen}(u).\,2\,du$$

Por prop. $\int a\,.\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$:

$$-2\,.\,2\int \operatorname{sen}(u)\,du$$

$$-4\int \operatorname{sen}\,(\mathrm{u})\,du$$

Integrando:

$$-4\,.\,(-cos\,(u) + C_1)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$4\cos(u) + C$$

Reemplazando en la expresión por (1):

$$4\,cos\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$