UBAXXI - Álgebra A - Resolución Examen Final - 16/07/25 - Tema 2

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

  Dados $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{v} = (2;0;4)$ y $\vec{w} = (2;-2;0)$. Elegí la opción que muestra el valor de $m \in \mathbb{Z}$ para que se cumpla que los vectores $\vec{z_1} = \vec{v} - \vec{w}$ y $\vec{z_2} = m\vec{w} - \vec{v}$ sean ortogonales.

  A) $\frac{1}{4}$ B) -4 C) 4 D) 16

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Como $\vec{z_1} = \vec{v} - \vec{w} = (0;2;4)$ y $\vec{z_2} = m\vec{w} - \vec{v} = (2m-2;-2m;-4)$ entonces
  $\vec{z_1} \cdot \vec{z_2} = (0;2;4) \cdot (2m-2;-2m;-4) = 0$ y de ahí $-4m - 16 = 0$ es decir $m = -4$.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

  Calculá <u>de manera exacta</u> la amplitud del ángulo que forman los planos de ecuación:
  $\pi_1 : -2x - 2y - z = 9$ y $\pi_2 : 2y + 2z = -5$.

  Respuesta: $\frac{\pi}{4}$
  Resolución
  El ángulo entre los planos es el mismo que determinan sus vectores normales: $\vec{N_1} = (-2;-2;-1)$ y $\vec{N_2} = (0;2;2)$. El mismo se calcula mediante la fórmula de producto escalar:
  $(-2;-2;-1) \cdot (0;2;2) = ||(-2;-2;-1)|| \cdot ||(0;2;2)|| \cdot \cos(\alpha)$. Si se despeja α se obtiene que $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ y su suplemento es $\frac{\pi}{4}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

  Considerá el subespacio $S = \langle (4;1;-1;0); (8;-3;-2;0); (0;5;0;0); \vec{v} \rangle$. Indicá la única afirmación que resulta verdadera.

  A) La dimensión de S es 3 para todo $\vec{v}$.
  B) La dimensión de S es 2 si $\vec{v} = (0;1;0;0)$.
  C) La dimensión de S es 3 si $\vec{v} = (0;1;0;0)$.
  D) La dimensión de S es 4 para todo $\vec{v}$ que no sea nulo.

  Opción correcta: B)
  Resolución
  Como $(8;-3;-2;0) = 2 \cdot (4;1;-1;0) - (0;5;0;0)$, podemos concluir que
  $S = \langle (4;1;-1;0); (8;-3;-2;0); (0;5;0;0); \vec{v} \rangle = \langle (4;1;-1;0); (0;5;0;0); \vec{v} \rangle$. De aquí podemos observar que la dimensión de este subespacio será 3 sólo si $\vec{v}$ no es combinación lineal de los vectores $(4;1;-1;0)$ y $(0;5;0;0)$, pues estos dos vectores son linealmente independientes, y en otro caso será 2. Siguiendo, como $(0;1;0;0) = \frac{1}{5} \cdot (0;5;0;0)$, la dimensión de S resulta 2 para $\vec{v} = (0;1;0;0)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)

Considerá V al vértice de la parábola $x^2 + 4x - 20y + 64 = 0$, y C al centro de la hipérbola $\dfrac{(x-3)^2}{7} - \dfrac{(y-4)^2}{18} = 1$. Determiná el valor exacto del radio de la circunferencia con centro en C que pasa por V.

Respuesta: $\sqrt{26}$

Resolución

La expresión canónica de la parábola es $(x+2)^2 = 20(y-3)$, por lo que $V = (-2; 3)$, y de la expresión de la hipérbola surge que $C = (3; 4)$. Es posible calcular la distancia entre V y C o determinar la ecuación de la circunferencia con centro en C que pasa por V:
$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 26$ para calcular de forma exacta el valor del radio que es $\sqrt{26}$.
Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 5 y 6.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)

Considerá la matriz $B = \begin{pmatrix} 1-k & 3 & 2 \\ 0 & 2+k & 1 \\ 0 & -1 & 2-k \end{pmatrix}$. Elegí la opción que muestra todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ de manera tal que la matriz no sea invertible.

A) $k \neq 1, k \neq -\sqrt{5}, k \neq \sqrt{5}$

B) $k = -1, k = \sqrt{5}$

C) $k = -1, |k| = \sqrt{5}$

D) $k = 1, |k| = \sqrt{5}$

Opción correcta: D)

Resolución

Una matriz no admite inversa si su determinante asociado es nulo. Si se calcula el determinante de la matriz B se obtiene $\det(B) = k^3 - k^2 - 5k + 5$. Si se aplica el lema de Gauss y la regla de Ruffini, se obtiene que los valores que anulan el determinante son $k = 1, k = -\sqrt{5}, k = \sqrt{5}$.
Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)

Indicá el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que se cumpla que al aplicar una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj de ángulo $\frac{\pi}{4}$ a $(-3\sqrt{2}; \sqrt{2})$ se obtiene como imagen $(k; -2)$.

Respuesta: -4

Resolución

Usando la matriz de una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj para $\mathbb{R}^2$ podemos plantear la condición indicada y hallar el valor de k pedido:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix}$$

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)

  Elegí la opción que ofrece la mejor aproximación a los centésimos del argumento de $(3+i)^5$.

  A) $1,61$

  B) $18,43$

  C) $0,32$

  D) $1,69$

Opción correcta: A)
Resolución
El argumento de $3+1i$ se calcula como $\alpha = arctg\left(\frac{1}{3}\right)$. Como se pide el argumento de $(3+1i)^5$ entonces, por las propiedades de los complejos, el argumento se calcula como $arctg\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 5 \approx 1,61$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)

  Considerá el polinomio $B(x) = x^5 + 5x^3 - 8x^2 + k$, del cual se sabe que $B\left(\sqrt{5}i\right) = 0$. Calculá el valor exacto de la suma de todas las raíces de $B(x)$.

Respuesta: 0
Resolución
A partir del dato es posible determinar el valor de $k = -40$ y expresar el polinomio obtenido como producto $B(x) = (x^2+5)(x^3-8)$. Las raíces en $\mathbb{C}[x]$ de $B(x)$ son $x_1 = 2$, $x_2 = \sqrt{5}i$, $x_3 = -\sqrt{5}i$, $x_4 = -1+\sqrt{3}i$ y $x_5 = -1-\sqrt{3}i$ Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
