

30/05/25

Tema 2

PUNTAJE	1) 2,5 puntos	2) a) 1 punto b) 1 punto	3) 2 puntos	4 al 10) 0,5 cada uno
---------	---------------	--------------------------	-------------	-----------------------

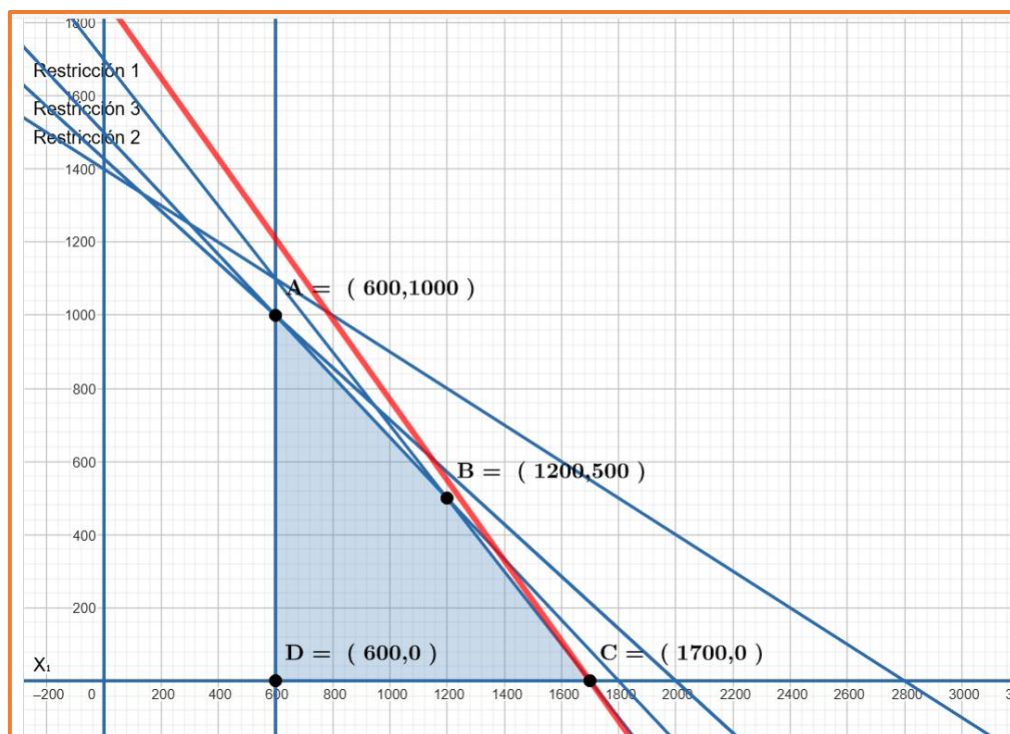
• Ejercicio 1

Un empresario desea fabricar dos tipos de congeladores denominados A y B. Cada uno de ellos debe pasar por tres operaciones antes de su comercialización: Ensamblaje, pintado y control de calidad. Los congeladores requieren, respectivamente, 2,5 y 3 horas respectivamente para ensamblaje, para el pintado 3 y 6 Kg de esmalte y 10 y 14 horas para el control de calidad. Los costos totales de fabricación por unidad son, respectivamente, \$30 y \$28, y los precios de venta \$52 y \$48, todos ellos en miles de pesos. El empresario dispone semanalmente de 4.500 horas para ensamblaje, de 8.400 Kg. de esmalte y 20.000 horas para control de calidad. Los estudios de mercado muestran que la demanda semanal de congeladores no supera las 1.700 unidades y que, en particular, la de tipo A es de, al menos, 600 unidades. Se desea conocer el plan de producción que maximice el beneficio, resuelva empleando el método gráfico.

Modelizamos el problema, considerando a x el número congeladores tipo A e y al número de congelares tipo B

$$Z = 22x + 20y \text{ Maximizar}$$

	A	B	Disponibilidad
Ensamblaje	2,5 horas	3 horas	4500 horas
Pintura	3kg	6kg	8400kg
Control de Calidad	10 horas	14 horas	20.000 horas
Beneficio	\$22	\$20	



$$\text{Sujeto a } \begin{cases} 2,5x + 3y \leq 4500 \\ 3x + 6y \leq 8400 \\ 10x + 14y \leq 20.000 \\ x + y \leq 1700 \\ x \geq 600 \end{cases} \quad \text{con } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Punto	Coordenadas (X ₁ ,X ₂)	Valor de la Función Objetivo 22X ₁ + 20X ₂
A	(600,1000)	22(600)+ 20(1000) = 33200
B	(1200,500)	22(1200)+ 20(500) = 36400
C	(1700,0)	22(1700)+ 20(0) = 37400
D	(600,0)	22(600)+ 20(0) = 13200

Solución óptima

Se deben producir 1700 unidades de A, y 0 de B, obteniéndose una ganancia máxima de \$ 37400 miles

• **Ejercicio 2**

1) a) Hallar el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores ;

$$A = \{(1;1;0;2), (2;-1;1;1)\}$$

Planteamos la combinación lineal de los vectores de $A = \{(1; 1; 0; 2), (2; -1; 1; 1)\}$ e igualamos a un vector genérico $(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4$ para determinar $\bar{A}$ o sea el subespacio generado por la familia A

$\alpha(1;1;0;2) + \beta(2;-1;1;1) = (a;b;c;d)$ Aplicamos la multiplicación por un escalar y la adición de los vectores

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ \alpha - \beta = b \\ \beta = c \\ 2\alpha - 2\beta = d \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 2 & 1 & d \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -a+b \\ 0 & 1 & c \\ 2 & 1 & d \end{array} \right) \xrightarrow{F_2-1\cdot\tilde{F}_1\rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -a+b \\ 0 & 1 & c \\ 2 & 1 & d \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -a+b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & -3 & -2a+d \end{array} \right) \xrightarrow{F_4-2\cdot\tilde{F}_1\rightarrow F_4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -a+b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & -3 & -2a+d \end{array} \right) \xrightarrow{\times(\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -a+b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & -3 & -2a+d \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot\tilde{F}_2\rightarrow F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -a+b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & -3 & -2a+d \end{array} \right) \\
 & \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -a+b \\ 0 & 0 & \frac{-a+b+3c}{3} \\ 0 & -3 & -2a+d \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -a+b \\ 0 & 0 & \frac{-a+b+3c}{3} \\ 0 & -3 & -2a+d \end{array} \right) \xrightarrow{F_4-1\cdot\tilde{F}_2\rightarrow F_4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -a+b \\ 0 & 0 & \frac{-a+b+3c}{3} \\ 0 & 0 & -a-b+d \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Para obtener el subespacio generado por la familia de vectores el sistema debe ser compatible y para ello debe cumplirse que $-a+b+3c=0 \wedge -a-b+d=0$, por lo tanto

$$\bar{A} = \left\{ (a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4 / -a+b+3c=0 \wedge -a-b+d=0 \right\}$$

b) ¿El vector $\vec{u}=(0;1;1;3)$ pertenece al subespacio generado por los vectores del conjunto A ? Justifique adecuadamente su respuesta

El vector u pertenece al subespacio generado si es combinación lineal de los vectores, debe cumplir las condiciones determinadas, entonces;

$\vec{u}=(0;1;1;3) \rightarrow -0+1+3\cdot 1=0 \wedge -0-1+3=0 \rightarrow$ Ninguna de las condiciones se cumple, entonces el vector $\vec{u}$ NO pertenece al subespacio

• Ejercicio 3

Sea $Z=100x+20y$ sujeta a
$$\begin{cases} x+2y \leq 400 \\ 2x+2y \leq 1000 \\ x+y \leq 300 \end{cases} \text{ con } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Convertim

os las restricciones en igualdades sumando las variables de holgura
$$\begin{cases} x+2y+S_1=400 \\ 2x+2y+S_2=1000 \\ x+y+S_3=300 \\ x,y \geq 0 \\ S_1,S_2,S_3 \geq 0 \end{cases}$$

Planteamos la primera tabla del simplex:

	C_j	100	20	0	0	0	Valor de la solución	
C_k	X_k	x	y	S_1	S_2	S_3	b	
0	S_1	1	2	1	0	0	400	400/1=400
0	S_2	2	2	0	1	0	1000	1000/2=500
0	S_3	(1)	1	0	0	1	300	300/1=300 → V.S
Z_j		0	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		100 - 0 = 100	20 - 0 = 20	0 - 0 = 0	0 - 0 = 0	0 - 0 = 0		

↑ V.E

	C_j	100	20	0	0	0	Valor de la solución
C_k	X_k	x	y	S_1	S_2	S_3	b
0	S_1	0	1	1	0	-1	100
0	S_2	0	0	0	1	-2	400
100	x	1	1	0	0	1	300
Z_j		100	100	0	0	100	30000
$C_j - Z_j$		100 - 100 = 0	20 - 100 = -80	0 - 0 = 0	0 - 0 = 0	0 - 100 = -100	

La solución óptima es $(x; y; S_1; S_2; S_3) = (300; 0; 100; 400; 0)$ $Z = 30.000$

Respuestas ejercicios de Opción múltiple

4) El conjunto de valores de $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores del conjunto $S = \{(a; 0; 1), (1; 1; a), (0; 1; 0)\}$ no generen a $\mathbb{R}^3$ es:

☒ a) $\{-1, 1\}$

☐ b) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

☐ c) $\emptyset$

☐ d) $\mathbb{R}$

3) El vector $\vec{u} = (0; -5; k)$ no es combinación lineal de los vectores del conjunto $T = \{(1; 0; -1), (2; 5; 1)\}$ sólo si:

☐ a) $k = -3$

☐ b) $\forall k \in \mathbb{R}$

☒ c) $k \neq -3$

☐ d) $\nexists k \in \mathbb{R}$

6) El ó los valores de $m \in \mathbb{R}$ para que $S = \{(0; 1; 1), (-m; 3; -1), (1; 0; m)\}$ constituyan una base de $\mathbb{R}^3$:

☐ a) $\nexists m \in \mathbb{R}$

☒ b) $m \neq -2 \wedge m \neq 2$

☐ c) $\forall m \in \mathbb{R}$

☐ d) $m = -2 \vee m = 2$

7) El plano balance que contiene todas las posibilidades de consumo $(x; y; z)$ para un presupuesto de \$7200, correspondiente a tres bienes, está dado por $\frac{x_1}{120} + \frac{x_2}{150} + \frac{x_3}{400} = 1$

Entonces la ecuación presupuestaria es:

☐ a) $60x_1 + 48x_2 + 18x_3 = 1$

☐ b) $120x_1 + 150x_2 + 400x_3 = 7200$

☒ c) $60x_1 + 48x_2 + 18x_3 = 7200$

☐ d) $\frac{x_1}{60} + \frac{x_2}{48} + \frac{x_3}{18} = 7200$

8) Sea $\begin{cases} x + y - 2z + 3w = 2 \\ 2x - 2y + z - 2w = 3 \\ 3x - y - z + w = 2 \end{cases}$, entonces la dimensión del conjunto solución del sistema homogéneo asociado es:

☐ a) $\dim S = 0$

☐ b) $\dim S = 1$

☒ c) $\dim S = 2$

☐ d) $\dim S = 3$

9) Dado el sistema homogéneo
$$\begin{cases} -y + (m+2)z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ -2x + my = 0 \end{cases}$$
 el conjunto de valores de $m \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución sea un subespacio de dimensión cero es:

☐ a) $\{0\}$

☐ b) $\mathbb{R}$

☒ c) $\mathbb{R} - \{0\}$

☐ d) $\emptyset$

10) Sea la región del plano R
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 15 \\ 3x - y \geq 15 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$
 los vértices de la región de soluciones factibles son

☐ a) $A(0;2)$ $B(0;5)$ $C(2;0)$ $D(15;0)$

☒ b) $A(5;0)$ $B(6;3)$ $C(15;0)$

☐ c) $A(0;0)$ $B(0;5)$ $C(6;3)$ $D(5;0)$

☐ d) No existen soluciones factibles

