UBAXXI - Álgebra A - Resolución Examen Final - 16/07/25 - Tema 1

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

Dados $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{v} = (0; 2; 4)$ y $\vec{w} = (-2; 2; 0)$. Elegí la opción que muestra el valor de $m \in \mathbb{Z}$ para que se cumpla que los vectores $\vec{z_1} = \vec{v} - \vec{w}$ y $\vec{z_2} = m\vec{w} - \vec{v}$ sean ortogonales.

A) $\frac{1}{4}$ B) 4 C) -4 D) 16

Opción correcta: C)
Resolución
Como $\vec{z_1} = \vec{v} - \vec{w} = (2; 0; 4)$ y $\vec{z_2} = m\vec{w} - \vec{v} = (-2m; 2m - 2; -4)$ entonces
$(2; 0; 4) \cdot (-2m; 2m - 2; -4) = 0$ y de ahí $-4m - 16 = 0$ es decir $m = -4$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

Calculá de manera exacta la amplitud del ángulo que forman los planos de ecuación:
$\pi_1 : 4x + 4y + 2z = 7$ y $\pi_2 : -2x - 2z + 1 = 0$.

Respuesta: $\frac{\pi}{4}$
Resolución
El ángulo entre los planos es el mismo que determinan sus vectores normales: $\vec{N_1} = (4; 4; 2)$ y $\vec{N_2} = (-2; 0; -2)$. El mismo se calcula mediante la fórmula de producto escalar:
$(4; 4; 2) \cdot (-2; 0; -2) = ||(4; 4; 2)|| \cdot ||(-2; 0; -2)|| \cdot \cos(\alpha)$. Si se despeja α se obtiene que $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ y su suplemento es $\frac{\pi}{4}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

Considerá el subespacio $S = \langle(5; 5; -1; 0); (10; 13; -2; 0); (0; 3; 0; 0); \vec{v}\rangle$. Indicá la única afirmación que resulta verdadera.

A) La dimensión de S es 3 para todo $\vec{v}$.
B) La dimensión de S es 3 si $\vec{v} = (0; 1; 0; 0)$.
C) La dimensión de S es 2 si $\vec{v} = (0; 1; 0; 0)$.
D) La dimensión de S es 4 para todo $\vec{v}$ que no sea nulo.

Opción correcta: C)
Resolución
Como $(10; 13; -2; 0) = 2 \cdot (5; 5; -1; 0) + (0; 3; 0; 0)$, podemos concluir que
$S = \langle(5; 5; -1; 0); (10; 13; -2; 0); (0; 3; 0; 0); \vec{v}\rangle = \langle(5; 5; -1; 0); (0; 3; 0; 0); \vec{v}\rangle$. De aquí observamos que la dimensión de este subespacio será 3 sólo si $\vec{v}$ no es combinación lineal de los vectores $(5; 5; -1; 0)$ y $(0; 3; 0; 0)$, en otro caso será 2 puesto que estos dos son linealmente independientes. Siguiendo, como $(0; 1; 0; 0) = \frac{1}{3} \cdot (0; 3; 0; 0)$, la dimensión de S resulta 2 para $\vec{v} = (0; 1; 0; 0)$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)

  Considerá V el vértice de la parábola $y^2 - 6y - 8x + 41 = 0$ y C el centro de la hipérbola $\dfrac{(x+2)^2}{12} - \dfrac{(y-5)^2}{14} = 1$. Determiná <u>el valor exacto</u> del radio de la circunferencia con centro en C que pasa por V.

  Respuesta: $\sqrt{40}$

  Resolución

  La expresión canónica de la parábola es $(y-3)^2 = 8(x-4)$, por lo que $V = (4;3)$, y de la expresión de la hipérbola surge que $C = (-2;5)$. Es posible calcular la distancia entre V y C o determinar la ecuación de la circunferencia con centro en C que pasa por V:
  $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 40$ para calcular de forma exacta el valor del radio que es $\sqrt{40}$.
  Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 5 y 6.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)

  Considerá la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-k \\ 4-k & 3 & -3 \\ 4 & -k & 2 \end{pmatrix}$. Elegí la opción que muestra todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ de manera tal que la matriz no sea invertible.

  A) $k \neq 6, k \neq -2, k \neq 2$

  B) $k = 6, k = 2$

  C) $k = 6, |k| = 2$

  D) $k = -6, k = -2$

  Opción correcta: C)

  Resolución

  Una matriz no admite inversa si su determinante asociado es nulo. Si se calcula el determinante de la matriz B se obtiene $\det(B) = -k^3 + 6k^2 + 4k - 24$. Si se aplica el lema de Gauss y la regla de Ruffini, se obtiene que los valores que anulan el determinante son $k = 2, k = -2, k = 6$.
  Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)

  Indicá el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que se cumpla que al aplicar una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj de ángulo $\frac{\pi}{4}$ a $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ se obtiene como imagen $(0;k)$.

  Respuesta: -2

  Resolución

  Usando la matriz de una rotación en sentido contrario a las agujas del reloj para $\mathbb{R}^2$ podemos plantear la condición indicada y hallar el valor de k pedido:
  $$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)
  Elegí la opción que ofrece la mejor aproximación a los centésimos del argumento de $(1+3i)^7$.

  A) $1,25$

  B) $71,56$

  C) $2,47$

  D) $2,60$

Opción correcta: C)
Resolución
El argumento de $1+3i$ se calcula como $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(3)$. Como se pide el argumento de $(1+3i)^7$ entonces, por las propiedades de los complejos, el argumento se calcula como $\tan^{-1}(3)\cdot 7 \approx 8,74$, que reducido a un ángulo menor que un giro nos da $2,47$.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)
  Considerá el polinomio $A(x) = x^5 + 7x^3 - 64x^2 + k$, del cual se sabe que $A\left(\sqrt{7}i\right) = 0$.
  Calculá el valor exacto de la suma de todas las raíces de $A(x)$.

Respuesta: 0
Resolución
A partir del dato es posible determinar el valor de $k = -448$ y expresar el polinomio obtenido como producto $A(x) = (x^2+7)(x^3-64)$. Las raíces en $\mathbb{C}[x]$ de $A(x)$ son $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt{7}i$, $x_3 = -\sqrt{7}i$, $x_4 = -2+2\sqrt{3}i$ y $x_5 = -2-2\sqrt{3}i$ cuya suma es 0. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
