

30/05/25

TEMA 1

PUNTAJE	1) 2,5 puntos	2) a) 1 punto	b) 1 punto	3) 2 puntos	4 al 10) 0,5 cada uno
---------	---------------	---------------	------------	-------------	-----------------------

1) Un estudiante de administración de empresas de una Facultad de Ciencias Económicas necesita completar un total de 85 cursos para graduarse. El número de cursos de administración tendrá que ser mayor que o igual a 22. El número de cursos ajenos al área de administración deberá ser mayor que o igual a 15. El curso de administración promedio requiere un libro de texto que cuesta \$40 e implica 130 horas de estudio. Los cursos ajenos al área de administración requieren un libro de texto que cuesta \$16 e implican 180 horas de estudio. El estudiante dispone de un presupuesto de \$2800 para libros. ¿Con qué combinación de cursos de administración y otros ajenos a esta área se minimizaría el número total de horas de estudio? Resolver empleando el método gráfico.

- 2)
- a) Determinar el conjunto de valores de $k \in \mathbb{R}$ para que los vectores del conjunto $A = \{(k + 2; 1; 3), (2; 3; 0), (-4; -6; 0)\}$ constituyen una familia linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$
- b) Hallar el subespacio generado por los vectores $A = \{(1; 2; -1; 3), (2; 1; 0; -2)\}$

- 3) Maximizar $Z = 3x + y$ utilizando simplex
- $$\begin{cases} 10x + 15y \leq 800 \\ 20x + 15y \leq 1000 \\ x + 2y \leq 100 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

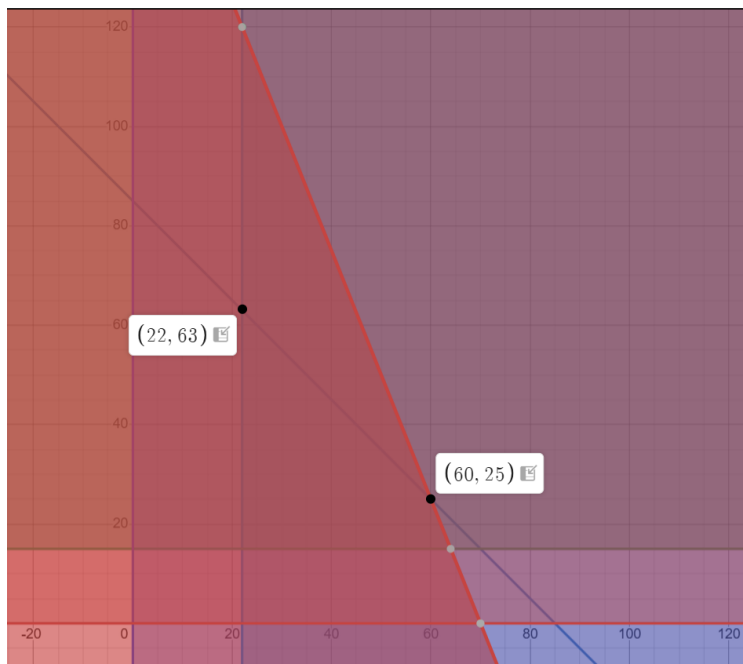
• Ejercicio 1

Un estudiante de administración de empresas de una Facultad de Ciencias Económicas necesita completar un total de 85 cursos para graduarse. El número de cursos de administración tendrá que ser mayor que o igual a 22. El número de cursos ajenos al área de administración deberá ser mayor que o igual a 15. El curso de administración promedio requiere un libro de texto que cuesta \$40 e implica 130 horas de estudio. Los cursos ajenos al área de administración requieren un libro de texto que cuesta \$16 e implican 180 horas de estudio. El estudiante dispone de un presupuesto de \$2800 para libros. ¿Con qué combinación de cursos de administración y otros ajenos a esta área se minimizaría el número total de horas de estudio? Resolver empleando el método gráfico.

Modelizamos el problema, considerando a x el número de horas de estudio de Administración e y al número de horas de estudio del área ajena a Administración.

$$Z = 130x + 180y \text{ Minimizar Sujeto a } \begin{cases} x + y = 85 \\ 40x + 16y \leq 2800 \\ x \geq 22 \\ y \geq 15 \end{cases} \text{ con } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$Z(x; y) = 130x + 180y$$



$$Z(22; 63) = 130.22 + 180.63 = 14.200$$

$$Z(60; 25) = 130.60 + 180.25 = 12.300$$

Solución óptima

Las horas de estudio se minimizan tomando 60 cursos de administración y 25 del área ajena a la Administración. El número mínimo de horas de estudio es de 12.300

• Ejercicio 2

a) **Determinar el conjunto de valores de $k \in \mathbb{R}$ para que los vectores del conjunto**

$A = \{(k + 2; 1; 3), (2; 3; 0), (-4; -6; 0)\}$ **constituyen una familia linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$**

$$\alpha(k + 2; 1; 3) + \beta(2; 3; 0) + \gamma(-4; -6; 0) = (0; 0; 0)$$

Operando e igualando al vector nulo, resulta el siguiente sistema

El sistema de ecuaciones lineales es un sistema homogéneo y cuadrado, por lo tanto para que la única solución sea la trivial, ya que se pide que la familia sea linealmente independiente, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser distinto de cero

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k+2 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc} k+2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}\right| \neq 0$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema y observamos que

El determinante es nulo independientemente del valor de k , ya que las columnas 2 y 3 son proporcionales, por lo tanto, no existe valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el conjunto sea linealmente independiente.

b) *Hallar el subespacio generado por los vectores*

$$A = \{(1; 2; -1; 3), (2; 1; 0; -2)\}$$

Planteamos la combinación lineal de los vectores de $A = \{(1; 2; -1; 3), (2; 1; 0; -2)\}$ e igualamos a un vector genérico $(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4$ para determinar $\overline{A}$ o sea el subespacio generado por la familia A

$\alpha(1;2;-1;3)+\beta(2;1;0;-2)=(a;b;c;d)$ Aplicamos la multiplicación por un escalar y la adición de los vectores

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ 2\alpha + \beta = b \\ -\alpha = c \\ 3\alpha - 2\beta = d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 2 & a \\ -2 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \\ 3 & -2 & d \end{array} \right) \xleftarrow{\times (-2)} F_2 - 2 \cdot \tilde{F}_1 \rightarrow F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 2 & a \\ 0 & -3 & -2a+b \\ -1 & 0 & c \\ 3 & -2 & d \end{array} \right) \xleftarrow{\times (1)} F_3 - (-1) \cdot F_1 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 2 & a \\ 0 & -3 & -2a+b \\ 0 & 2 & a+c \\ 3 & -2 & d \end{array} \right) \xleftarrow{\times (-3)} F_4 - 3 \cdot \tilde{F}_1 \rightarrow F_4 \\ & \equiv \\ & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & \textcircled{-3} & -2a+b \\ 0 & 2 & a+c \\ 0 & -8 & -3a+d \end{array} \right) \xleftarrow{\times \left(\frac{2}{3}\right)} F_3 - \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \tilde{F}_2 \rightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & \textcircled{-3} & -2a+b \\ 0 & 0 & \frac{-a+2b+3c}{3} \\ 0 & -8 & -3a+d \end{array} \right) \xleftarrow{\times \left(\frac{-8}{3}\right)} F_4 - \left(\frac{8}{3}\right) \cdot \tilde{F}_2 \rightarrow F_4 \\ & \equiv \\ & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & -2a+b \\ 0 & 0 & \frac{-a+2b+3c}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7a-8b+3d}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Para obtener el subespacio generado por la familia de vectores el sistema debe ser compatible y para ello debe cumplirse que $-a+2b+3c=0 \wedge 7a-8b+3d=0$, por lo tanto

$$\overline{A} = \{(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4 / -a+2b+3c=0 \wedge 7a-8b+3d=0\}$$

• Ejercicio 3

Maximizar $Z = 3x + y$ utilizando simplex $\begin{cases} 10x + 15y \leq 800 \\ 20x + 15y \leq 1000 \\ x + 2y \leq 100 \end{cases}$ con $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Convertimos las restricciones en igualdades sumando las variables de holgura $\begin{cases} 10x + 15y + S_1 = 800 \\ 20x + 15y + S_2 = 1000 \\ x + 2y + S_3 = 100 \\ x, y \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$

Planteamos la primera tabla del simplex:

	C_j	3	1	0	0	0	Valor de la solución	
C_k	X_k	x	y	S_1	S_2	S_3	b	
0	S_1	10	15	1	0	0	800	800/10=80
0	S_2	20	15	0	1	0	1000	1000/20=50 $\rightarrow V.S$
0	S_3	1	2	0	0	1	100	100/1=100
Z_j		0	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		3 - 0 = 3	1 - 0 = 1	0 - 0 = 0	0 - 0 = 0	0 - 0 = 0		

$\uparrow V.E$

	C_j	3	1	0	0	0	Valor de la solución	
C_k	X_k	x	y	S_1	S_2	S_3	b	
0	S_1	10	15	1	0	0	800	800/10=80
0	S_2	(1)	3/4	0	1/20	0	50	1000/20=50 $\rightarrow V.S$
0	S_3	1	2	0	0	1	100	100/1=100
Z_j		0	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$		3 - 0 = 3	1 - 0 = 1	0 - 0 = 0	0 - 0 = 0	0 - 0 = 0		

	C_j	3	1	0	0	0	Valor de la solución
C_k	X_k	x	y	S_1	S_2	S_3	b
0	S_1	0	15/2	1	-1/2	0	300
3	x	(1)	3/4	0	1/20	0	50
0	S_3	0	1/4	0	-1/20	1	50
Z_j		3	9/4	0	3/20	0	150
$C_j - Z_j$		3 - 3 = 0	1 - 9/4 = -5/4	0 - 0 = 0	0 - 3/20 = -3/20	0 - 0 = 0	

La solución óptima es $(x; y; S_1; S_2; S_3) = (50; 0; 300; 0; 50)$ $Z = 150$

Respuestas ejercicios de Opción múltiple

4) El vector $\vec{u} = (0; -5; k)$ es combinación lineal de los vectores del conjunto $T = \{(1; 0; -1), (2; 5; 1)\}$ sólo si:

☒ a) $k = -3$

☐ b) $k = -1$

☐ c) $k = 2$

☐ d) $\exists k \in \mathbb{R}$

5) Una base del subespacio $S = \{(x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 / x - w = 0 \wedge y + w = 0\}$ es:

☐ a) $B_S = \{(1; 0; 0; -1), (0; 1; 0; 1)\}$

☐ b) $B_S = \{(1; -1; 0; 1)\}$

☐ c) $B_S = \{(1; 0; 0; 1), (0; 1; 0; -1)\}$

☒ d) $B_S = \{(1; -1; 0; 1), (0; 0; 1; 0)\}$

6) Los valores de $m \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado a:
$$\begin{cases} x - y + mz = 3 \\ mx + 2y + z = 2 \\ -x + y + 2mz = 1 \end{cases}$$
 sea un subespacio de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ dimensión cero, son:

- ☐ a) $m = -2 \vee m = 0$ ☒ b) $m \neq -2 \wedge m \neq 0$ ☐ c) $\forall m \in \mathbb{R}$ ☐ d) $\nexists m \in \mathbb{R}$

7) El plano balance que contiene todas las posibilidades de consumo $(x; y; z)$ para un presupuesto de \$7200, correspondiente a tres bienes, está dado por $\frac{x_1}{120} + \frac{x_2}{150} + \frac{x_3}{400} = 1$

Entonces el vector de precios es:

- ☐ a) $\bar{p} = (120; 150; 400)$ ☐ b) $\bar{p} = (48; 60; 160)$
☒ c) $\bar{p} = (60; 48; 18)$ ☐ d) $\bar{p} = (150; 120; 45)$

8) El ó los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el vector $\vec{u} = (0; 1; 1; -4)$ NO pertenezca al subespacio generado por los vectores del conjunto $A = \{(0; 2; -1; \lambda), (0; \lambda; -1; 2)\}$ son:

- ☒ a) $\lambda = 2$ ☐ b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
☐ c) $\lambda \neq 2$ ☐ d) $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$

9) ¿Para qué valores de $b \in \mathbb{R}$ la solución del sistema
$$\begin{cases} 3x + 2y + z - w = 4 - b \\ 4x + 2y - 3z + w = 0 \end{cases}$$
 es un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$?

- ☐ a) $b = 0$ ☐ b) $b = 1$
☐ c) $b = -4$ ☒ d) $b = 4$

10) Dada la siguiente función $F(x; y) = 6x + 3y - 2$ y la región determinada por las siguientes

restricciones
$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ 2x + 5y \leq 30 \\ 2x - y \leq 6 \end{cases}$$
 los vértices de la región de soluciones factibles son:

- ☐ a) $A(0; 0)$ $B(3; 0)$ $C(0; 6)$ ☐ b) $A(3; 0)$ $B(5; 4)$ $C(15; 0)$
☒ c) $A(0; 6)$ $B(5; 4)$ $C(3; 0)$ ☐ d) No existen soluciones factibles

