Análisis II / Matemática 3 / Análisis Matemático II
Segundo cuatrimestre 2021 - Segundo parcial (24/11/2021)

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre: Nro. de libreta:
Carrera:

Ejercicio 1
Hallar $a \in \mathbb{R}$ *de modo tal que* $\mu(x, y) = xy$ *sea factor integrante de la ecuación diferencial*

$$(3xy + 2y)\,dx + (ax^2 + ax)\,dy = 0.$$

Resolver la ecuación para ese valor de a.

Ejercicio 2
Hallar la solución $y = y(x)$ *de la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 6y(x) = -e^x + 12x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Ejercicio 3
Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ *tales que la solución general* $y = y(x)$ *de la ecuación diferencial*

$$x^2y'' + 2xy' + ky = 0, \quad x > 0$$

cumple que $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Ejercicio 4
Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = x^2 + 5x - 2xy - 10y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Hallar los puntos de equilibrio, estudiar el sistema linealizado y esbozar el diagrama de fases cerca de esos puntos.

Justifique todas las respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.

①

2do PARCIAL
ANÁLISIS II

FECHA: 24/11/2021

1	2	3	4	NOTA
B	B⁻	B	B⁻	A

[redacted]

1) Hallar $a \in \mathbb{R}$ de tal modo que $\mu(x,y) = xy$ sea factor integrante de la ecuación diferencial

$$\underbrace{(3xy + 2y)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(ax^2 + ax)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

Para que μ sea factor integrante,

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x$$

$$\Longleftrightarrow \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$$ ✓

- $\mu_y = x$
- $\mu_x = y$
- $P_y = 3x + 2$
- $Q_x = 2ax + a$

$$\mu_y P + \mu P_y = 3x^2y + 2xy + 3x^2y + 2xy$$
$$= 6x^2y + 4xy$$ ✓

$$\mu_x Q + \mu Q_x = a x^2 y + a x y + 2a x^2 y + a x y$$
$$= 3a x^2 y + 2a x y$$

y igualo

$$6x^2 y + 4xy = 3a x^2 y + 2a x y$$
$$\begin{cases} 6 = 3a \\ 4 = 2a \end{cases} \iff \boxed{a = 2}$$

Resolvemos la ecuación para ese valor de a

Con el a conseguido, tengo que

$$\tilde{P} = \mu P = 3(xy)^2 + 2xy^2$$
$$\tilde{Q} = \mu Q = 2x^3 y + 2x^2 y$$

Para resolver la ecuación, primero busco una función $f(x,y) \in C^2$ tal que $f_x = \tilde{P}$ y $f_y = \tilde{Q}$. De esta forma, si tengo la ecuación algebraica

$$f(x,y) = k \quad , k \in \mathbb{R}$$
$$df = f_x dx + f_y dy = 0$$
$$\iff \tilde{P}\, dx + \tilde{Q}\, dy = 0$$

que es equivalente a la ecuación original

②
$f_x = 3(xy)^2 + 2xy^2$

$f = x^3 y^2 + (xy)^2 + h(y)$

$f_y = 2x^3 y + 2x^2 y = 2x^3 y + 2x^2 y + h'(y)$

$\Leftrightarrow h'(y) = 0$

$h(y) = C$

Una función f es

$f(x,y) = x^3 y^2 + (xy)^2$

Si quiero conseguir soluciones $y(x)$, estas serán las que cumplen que

$$\boxed{x^3 y(x)^2 + (x\, y(x))^2 = k, \; k \in \mathbb{R}}$$

③

Ejercicio 2

Hallar la solución $y=y(x)$ de la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales

$$\begin{cases} (*)\ y''(x) - y'(x) - 6y(x) = -e^x + 12x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

(*) es una ecuación lineal de orden 2 no homogénea, con coeficientes constantes. Primero busco la solución general a la homogénea, que podré encontrar. Es decir

$$(**)\quad y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$$

Para esto, busco soluciones de la forma $e^{\lambda x}$. La ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -2$$ ✓

Tengo dos soluciones a la homogénea, que son $y_A = e^{-2x}$ e $y_B = e^{3x}$, que son l.i

$$y_H = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

Luego, tengo que conseguir una solución particular $y_p(x)$ para (**). Para eso, traslado la ecuación a sistema:

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y'' = y_1' = 6y_0 + y_1 - e^x + 12x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -e^x + 12x \end{pmatrix}}_{b(x)}$$

Sé que la matriz fundamental $Q(x)$ del sistema asociado a la ecuación homogénea es

$$Q(x) = \begin{pmatrix} y_A & y_B \\ y_A' & y_B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & 3e^{3x} \end{pmatrix}$$

Primero, busco $C(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$ tal que

$$C'(x) = Q^{-1}(x)\, b(x)$$

7

$$Q^{-1}(x) = \frac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} 3e^{3x} & -e^{3x} \\ 2e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$\det Q = 3e^{x} + 2e^{x} = 5e^{x}$$

$$\frac{1}{\det Q} = \frac{1}{5} e^{-x}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{2x} & -e^{2x} \\ 2e^{-3x} & e^{-3x} \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} b = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{3x} - 12xe^{2x} \\ -e^{-2x} + 12xe^{-3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$c_1 = \int \frac{1}{5} \left(e^{3x} - 12xe^{2x} \right) dx$$

$$c_2 = \int \frac{1}{5} \left(-e^{-2x} + 12xe^{-3x} \right) dx$$

$$c_1 = \frac{1}{5} \left(\frac{e^{3x}}{3} - \int 12xe^{2x}\, dx \right)$$

$$\int axe^{bx}\, dx = a \left(\frac{xe^{bx}}{b} - \frac{e^{bx}}{b^2} \right)$$

Pues $\displaystyle\int axe^{bx}\, dx = a \int xe^{bx}\, dx$

$$u = x \qquad dv = e^{bx}$$

$$du = dx \qquad v = \frac{e^{bx}}{b}$$

$$= a\left(\frac{xe^{bx}}{b} - \int \frac{e^{bx}}{b}\right) = a\left(\frac{xe^{bx}}{b} - \frac{e^{bx}}{b^2}\right)$$

$$\int 12xe^{2x}\,dx = 12\left(\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right)$$

$$= 6xe^{2x} - 3e^{2x}$$

$$c_1(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{e^{3x}}{3} - 6xe^{2x} + 3e^{2x}\right)$$ ✓

$$c_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{e^{-2x}}{2} + \int 12xe^{-3x}\,dx\right)$$

$$\int 12xe^{-3x}\,dx = 12\left(\frac{xe^{-3x}}{-3} - \frac{e^{-3x}}{9}\right)$$

$$= -4xe^{-3x} - \frac{4}{3}e^{-3x}$$

$$c_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{e^{-2x}}{2} - 4xe^{-3x} - \frac{4}{3}e^{-3x}\right)$$

una solución particular está dada por

$$y_p = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{3x}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{e^x}{3} - 6x + 3 + \frac{e^x}{2} - 4x - \frac{4}{3}\right)$$ ✓

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{5e^x}{6} - 10x + \frac{5}{3}\right) = \boxed{\frac{e^x}{6} - 2x + \frac{1}{3}}$$

5 Entonces, la solución general de la no homogénea es

$$Y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + \frac{e^x}{6} - 2x + \frac{1}{3}$$

$$= Y_H(x) + Y_p(x)$$

Ahora bien, quiero que (Por las características de la ecuación, se que es única)

- $Y(0) = 1$
- $Y'(0) = -2$

falta $e^0/6 = 1/6$

$$Y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 1$$

$$c_1 + c_2 = \frac{2}{3}$$

$$Y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x} + \frac{e^x}{6} - 2$$

$$Y'(0) = -2c_1 + 3c_2 + \frac{1}{6} - 2 = -2$$

$$\Longleftrightarrow -2c_1 + 3c_2 = -\frac{1}{6}$$

Tenemos
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{2}{3} \\ -2c_1 + 3c_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$c_2 = \frac{2}{3} - c_1$$

$$-2c_1 + 3c_2 = -2c_1 + 2 - 3c_1 = -\frac{1}{6}$$

$$-5c_1 = -\frac{13}{6}$$

$$c_1 = \frac{13}{30}$$

$$c_2 = \frac{20}{30} - \frac{13}{30} = \frac{7}{30}$$

Se arrastra error

La solución para el problema de valores iniciales es

$$\boxed{Y(x)=\frac{13}{30}e^{-2x}+\frac{7e^{3x}}{30}+\frac{e^{x}}{6}-2x+\frac{1}{3}}$$

↳ se arrastra error de cuenta

(6) Ejercicio 3

Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la solución de la ecuación diferencial cumple que $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$

$$x^2 y'' + 2xy' + ky = 0$$

Esto se trata de una ecuación de Euler. Ésta se puede transformar a ecuación de coeficientes constantes, realizando el cambio de variables $x = e^t$

Entonces, si tenemos una ecuación de la forma
$$x^2 y''_{(x)} + p x y'_{(x)} + q y_{(x)} = 0,$$
esto es equivalente a obtener

$$y''(t) + (p-1) y'(t) + q y(t) = 0$$

En este caso, $p = 2$ y $q = k$. Quedaría

$$y''(t) + y'(t) + k y(t) = 0$$

Busco soluciones de la forma $e^{\lambda t}$. La ecuación característica es

$$\lambda^2 + \lambda + k = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$$

Tengo 3 casos: i) $1-4k>0 \iff k<\frac{1}{4}$

ii) $1-4k=0 \Rightarrow k=\frac{1}{4}$

iii) $1-4k<0 \iff k>\frac{1}{4}$ ✓

i) a) $0<\sqrt{1-4k}<1 \iff 0<k<\frac{1}{4}$

Tendré dos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$

entonces

$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$\iff Y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2}$ ✓

vemos que $\lim_{x \to +\infty} Y(x) = 0$ → no cumple

b) $\sqrt{1-4k} = 1 \Rightarrow k=0.$

Tendré $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 < 0$

$Y(t) = c_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$Y(x) = c_1 + c_2 x^{\lambda_2}$. ✓ vemos que $\lim_{x\to+\infty} Y(x) = C$

no no cumple

c) $\sqrt{1-4k} > 1 \iff k<0$

Tendré $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ diferentes

$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$Y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$ ✓

$\textcircled{+}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty \rightarrow$ no se cumple

caso ii) $k = \frac{1}{4}$

Tendré un único $\lambda = -\frac{1}{2}$

sé que las soluciones $y(\tau)$ serán

$$y(\tau) = e^{\lambda\tau} + \tau e^{\lambda\tau} \quad , \quad \tau = \ln x$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) \underset{L'Hop}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} 2x^{-\frac{1}{2}} = 0$$

Para $k = \frac{1}{4}$ se cumple

Caso iii) $k > \frac{1}{4}$

Tendré dos autovalores λ y $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$

una solución es $e^{\lambda\tau}$. Pero también se que $\mathrm{Re}(e^{\lambda\tau})$ y $\mathrm{Im}(e^{\lambda\tau})$ son soluciones l.i

si $\lambda = -\frac{1}{2} + \beta i$, con $\beta^2 = 1-4k$

$$e^{\lambda\tau} = e^{-\frac{1}{2}\tau}(\cos(\beta\tau) + i\,\mathrm{sen}(\beta\tau))$$

$$\mathrm{Re}(e^{\lambda\tau}) = e^{-\frac{\tau}{2}}\cos(\beta\tau)$$

$$\mathrm{Im}(e^{\lambda\tau}) = e^{-\frac{\tau}{2}}\mathrm{sen}(\beta\tau)$$

Escaneado con CamScanner

$$Y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)\right)$$

$$Y(x) = \frac{c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} Y(x) = 0$$. También se cumple

En resumen, se cumple para los casos i) a), ii) y iii)

$\boxed{\text{En conclusión, se cumple } \forall k \geq 0}$

8

ej 4) Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = x^2+5x-2xy-10y \\ y' = x+y \end{cases}$$

Hallar los puntos de equilibrio, estudiar el sistema linealizado y dibujar el diagrama de fase cerca de esos puntos

Este es un sistema autónomo. Llamo $F = (x^2+5x-2xy-10y,\ x+y)$. Como no es lineal, puedo aplicar el teorema de la linealización que dice que el comportamiento de las trayectorias alrededor de los puntos críticos se aproxima al del sistema asociado

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = DF(P)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde P es punto de equilibrio, si los autovalores de $DF(P)$ tienen parte real no nula. Busco los puntos de equilibrio

$$\begin{cases} 0 = x^2+5x-2xy-10y \\ 0 = x+y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 0 = x^2 + 5x + 2x^2 + 10x = 3x^2 + 15x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x(3x+15) = 0 \qquad x = 0 \text{ ó } x = -5$$

$$y = -x \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$y = 0 \qquad y = 5$$

Los puntos de equilibrio son

$$P_1 = (0,0) \text{ y } P_2 = (-5,5)$$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+5-2y & -2x-10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{P_1}$

$$DF(P_1) = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Busco soluciones del sistema asociado, de la forma

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} v$, donde λ es un autovalor de $DF(P_1)$ y v un autovector asociado

Asumo que la ecuación característica para una matriz A es

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) = 0$$

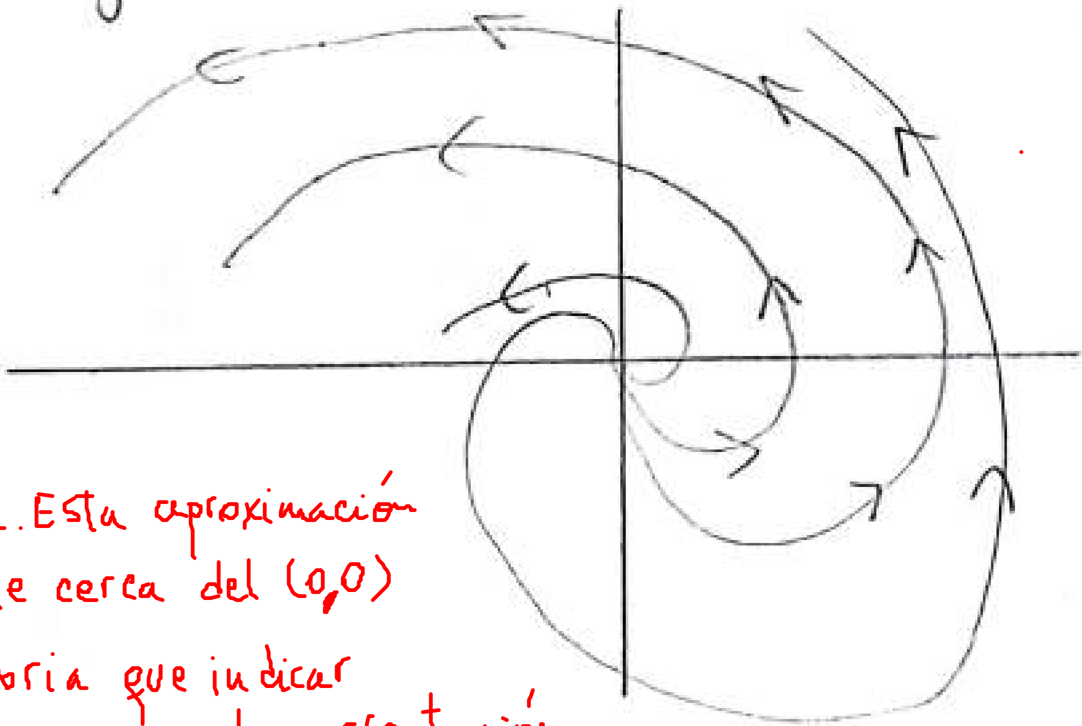
En este caso

$$\lambda^2 - 6\lambda + 15 = 0$$

Escaneado con CamScanner

(9) $\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-60}}{2} = 3 \pm \sqrt{6}$

Tenemos dos autovalores complejos λ_1, λ_2, donde uno es el conjugado del otro. Entonces como la parte real es positiva, será un nodo focal inestable, y el diagrama de fases se verá aproximadamente de la siguiente manera ✓



OK. Esta aproximación vale cerca del (0,0)
Habría que indicar porque es esta orientación y no

$P_2 = (-5, 5)$

Bueno soluciones del mismo enunciado análogamente al caso anterior

$$DF(P_2) = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + 14\lambda - 15 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 60}}{2} = \frac{-14 \pm 16}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -15$$

Tengo dos autovalores reales, uno positivo y el otro negativo. Busco autovalores asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente.

$\lambda_1 = 1$

$$\left(DF(P_2) - I\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \iff v_1 = 0$$

$$v_2 \in \mathbb{R}$$

$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un autovector

$\lambda_2 = -15$

(1c) $(DF(P_2)+15I)\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=0$

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=0 \qquad w=\begin{pmatrix}1\\-16\end{pmatrix} \text{ es un autovector}$$

$w_1=-16w_2$

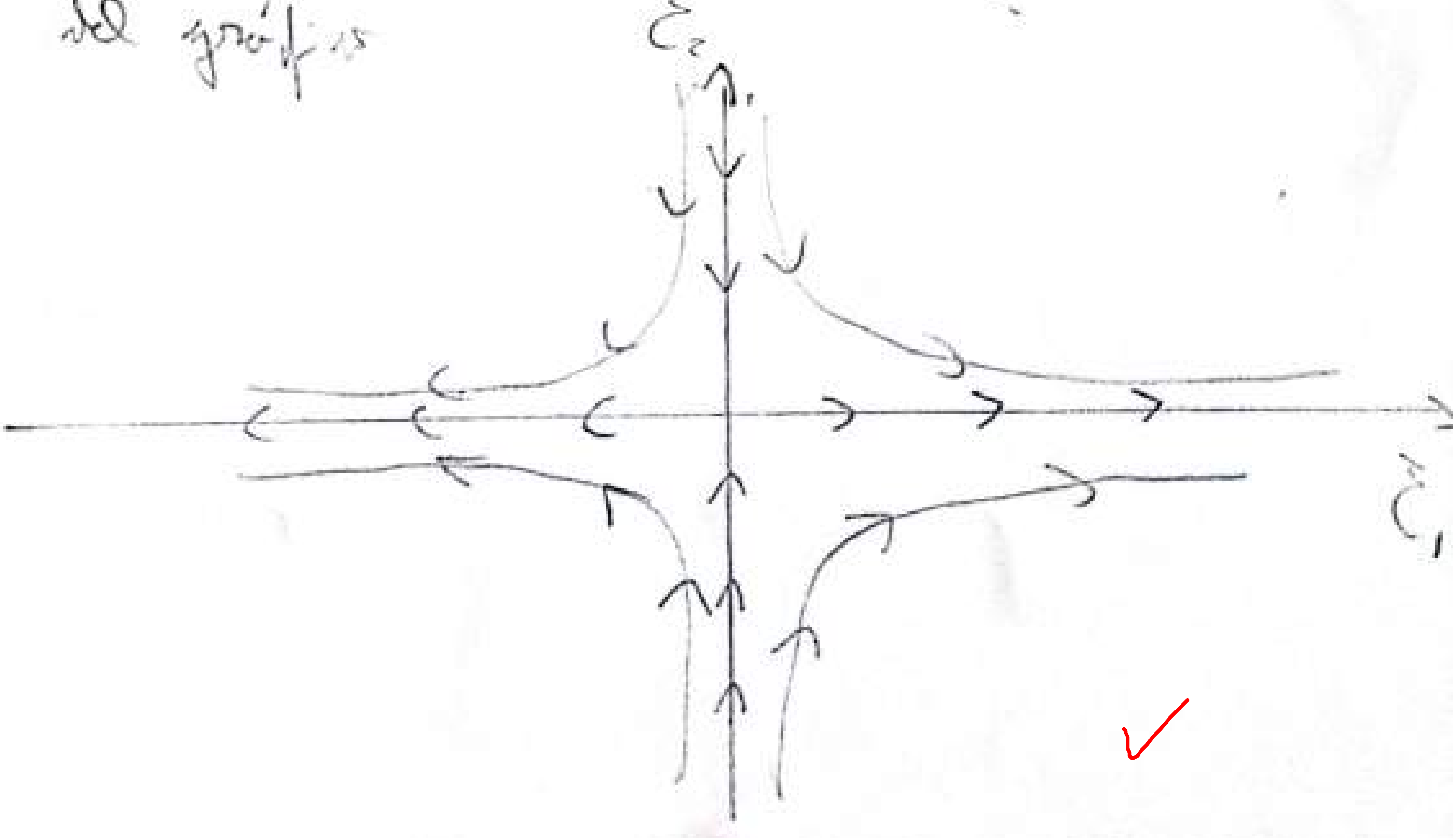
Las soluciones son de la forma

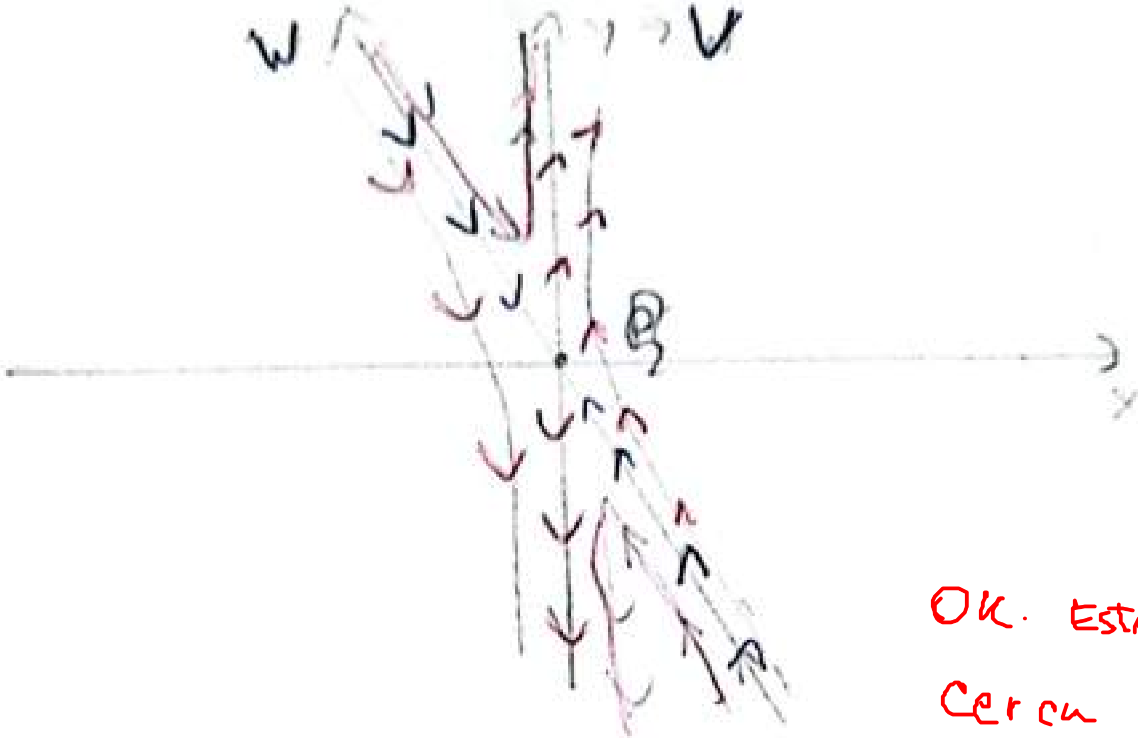
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=c_1e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{-15t}\begin{pmatrix}1\\-16\end{pmatrix}$$

Llamo $\xi_1=c_1e^{t}$, $\xi_2=c_2e^{-15t}$

$$\xi_2=k\,\xi_1^{-15}$$

Será un punto silla en las coordenadas de la base v, w. Como el $(-5,5)$ sale fuera del gráfico





Ok. Esto vale

cerca del

(-5, 5)