MATEMATICA

(Cátedra: Rossomando)

Compilado de modelos de examen.

1er parcial.

Ciclo Básico Común - Universidad de Buenos Aires

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 1)** **MODELO**

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Se debe resolver a partir del enunciado, no de las respuestas. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Escribir como intervalo o unión de intervalos la solución del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{5x}{x-1} < 3\}$

   √ $\left(\frac{-3}{2}; 1\right)$ ☐ $\left(-\infty; \frac{-3}{2}\right)$ ☐ $(1; +\infty)$ ☐ $\left(-\infty; \frac{-3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$

2. Sea $f(x)$ la función cuadrática tal que su gráfico tiene vértice $V = (2; -27)$ y $f(0) = -15$. Hallar el conjunto de positividad de $f(x)$.

   ☐ $C^+ : (-1; 5)$ ☐ $C^+ : (-\infty; -1)$ ☐ $C^+ : (5; +\infty)$ √ $C^+ : (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$

3. Sean $F(x)$ la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos $(1; 2)$ y $(0; 4)$; y $G(x) = \frac{3}{2x+1}$, y $H(x) = G \circ F(x)$. Dar la ecuación de la asíntota vertical de $H(x)$.

   ☐ AV en $x = 2$ √ **AV en** $x = \frac{9}{4}$ ☐ AV en $x = -\frac{9}{4}$ ☐ AV en $x = -2$

4. Dada $f(x) = ln(6x - 18) + 5$, hallar $f^{-1}(x)$ y dar su imagen.

   √ $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}e^{x-5} + 3$**; Imagen:** $(3; +\infty)$ ☐ $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}e^{x-5} + 3$; Imagen: $(-\infty; 3)$

   ☐ $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}^{x-5} - 3$; Imagen: $(3; +\infty)$ ☐ $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}e^{x+5} + 3$; Imagen: $(3; +\infty)$

1. Escribir como intervalo o unión de intervalos la solución del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{5x}{x-1} < 3\}$

   Comenzamos por llegar a la fracción única.

$$\frac{5x}{x-1} < 3$$

$$\frac{5x}{x-1} - 3 < 0$$

$$\frac{5x - 3(x-1)}{x-1} < 0$$

$$\frac{5x - 3x + 3}{x-1} < 0$$

$$\frac{2x+3}{x-1} < 0$$

   Como se nos pide que $\frac{A}{B} < 0$ planteamos los casos de signos desiguales $(+/-$ y $-/+)$.

   Primer caso:

$$\mathbf{A > 0 \wedge B < 0}: \begin{array}{ccc} 2x+3 > 0 & \wedge & x-1 < 0 \\ x > -\frac{3}{2} & \wedge & x < 1 \end{array}$$

   Solución primer caso $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$

   Segundo caso:

$$\mathbf{A < 0 \wedge B > 0}: \begin{array}{ccc} 2x+3 < 0 & \wedge & x-1 > 0 \\ x < -\frac{3}{2} & \wedge & x > 1 \end{array}$$

   Solución segundo caso $\emptyset$

$$\text{Solución total: } \left(-\frac{3}{2}; 1\right)$$

2. Sea $f(x)$ la función cuadrática tal que su gráfico tiene vértice $V = (2; -27)$ y $f(0) = -15$. Hallar el conjunto de positividad de $f(x)$.

   Se sabe que $f(x)$ es cuadrática y se conoce su vértice, por lo que podemos plantear la forma canónica.

$$y = a(x-2)^2 - 27$$

   Para hallar el valor de a usamos el punto que se nos da.

$$-15 = a(0-2)^2 - 27$$

$$12 = a(-2)^2$$

$$12 = a(4)$$

$$3 = a$$

Ahora podemos dar la ecuación de la función.

$$y = 3(x-2)^2 - 27$$

Se nos pide hallar la positividad de la función, para ello necesitamos los ceros de la misma, los cuales podemos hallar igualando la función a 0.

$$0 = 3(x-2)^2 - 27$$

$$27 = 3(x-2)^2$$

$$9 = (x-2)^2$$

$$3 = |x-2|$$

Separamos el modulo en sus dos partes.
Resolvemos el primer caso.

$$\begin{gathered} x - 2 = 3 \\ x = 5 \end{gathered}$$

Resolvemos el segundo caso.

$$\begin{gathered} x - 2 = -3 \\ x = -1 \end{gathered}$$

Sabemos que sus ceros son $C^0 : \{-1; 5\}$ por lo que sabemos que tenemos tres intervalos, los que pueden ser positivos o negativos, que son $(-\infty; -1)$; $(-1; 5)$ y $(5; +\infty)$, para saber sus signos vamos a evaluar un numero de cada intervalo en $f(x)$

$$\begin{array}{lll} f(-2) & = 3((-2)-2)^2 - 27 & = 21 \\ f(0) & = 3((0)-2)^2 - 27 & = -15 \\ f(6) & = 3((6)-2)^2 - 27 & = 21 \end{array}$$

Así sabemos que los intervalos positivos son los laterales, o sea que $C^+ : (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$

3. Sean $F(x)$ la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos $(1; 2)$ y $(0; 4)$; y $G(x) = \dfrac{3}{2x+1}$, y $H(x) = G \circ F(x)$. Dar la ecuación de la asíntota vertical de $H(x)$.

Con los puntos que se nos dan formamos a $f(x)$, hallamos la pendiente:

$$m = \frac{(2)-(4)}{(1)-(0)} = \frac{-2}{1} = -2$$

Podemos ya decir que:

$$F(x) = -2x + b$$

El punto $(0;4)$ es la ordenada al origen, y por tanto, $b = 4$, asi que:

$$F(x) = -2x + 4$$

Sabiendo esto, componemos $H(x)$

$$H(x) = \frac{3}{2(-2x+4)+1}$$

$$H(x) = \frac{3}{-4x+8+1}$$

$$H(x) = \frac{3}{-4x+9}$$

Vemos que $H(x)$ es homografica, por lo que podemos saber ya su asintota.

$$\text{AV } x = \frac{-d}{c} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}$$

4. Dada $f(x) = ln(6x-18)+5$, hallar $f^{-1}(x)$ y dar su imagen.

Calculamos el dominio de $f(x)$, ya que este equivale a la imagen de su inversa.

$$6x - 18 > 0$$

$$6x > 18$$

$$x > 3$$

El dominio es $(3;+\infty)$ y por consiguiente, la imagen de $f^{-1}(x)$.

Pasamos a calcular la inversa en si misma.

$$y = ln(6x-18)+5$$

$$y - 5 = ln(6x-18)$$

$$e^{y-5} = 6x - 18$$

$$e^{y-5} + 18 = 6x$$

$$\frac{e^{y-5}+18}{6} = x$$

$$\frac{e^{x-5}+18}{6} = \frac{1}{6}e^{x-5} + 3 = y^{-1}$$

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Se debe resolver a partir del enunciado, no de las respuestas. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Sean $f(x) = x^3 - 3x^2$, $P = (1; f(1))$ y $Q = (3; f(3))$. Hallar P y Q y la distancia que hay entre ellos.

   ☐ $d(PQ) = -\sqrt{8}$ ☐ $d(PQ) = \sqrt{80}$ √ $d(PQ) = \sqrt{8}$ ☐ $d(PQ) = \sqrt{18}$

2. Siendo $f(x) = 2x^2 + bx + c$, se pide: determinar b y c, de modo que el punto $(1; -9/2)$ sea el vértice de su gráfico. Para los valores hallados, expresar el conjunto de positividad de f.

   ☐ $b = 4$; $c = -\frac{5}{2}$; $C^+ : \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ √ $\boldsymbol{b = -4; c = -\frac{5}{2}; C^+ : \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)}$

   ☐ $b = -4$; $c = \frac{5}{2}$; $C^+ : \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ ☐ $b = -4$; $c = -\frac{5}{2}$; $C^+ : \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$

3. Dadas $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x + 7}$, $g(x) = 2x + 1$, y $h(x) = f \circ g(x)$, calcular $h(x)$ y dar las ecuaciones de todas sus asíntotas.

   ☐ AV: $x = 4$ y AH: $y = 3$; $h(x) = \dfrac{6x + 7}{2x + 8}$ √ **AV:** $x = -4$ **y AH:** $y = 3$**;** $h(x) = \dfrac{6x + 7}{2x + 8}$

   ☐ AV: $x = -4$ y AH: $y = 3$; $h(x) = \dfrac{6x + 7}{x + 8}$ ☐ AV: $x = -4$ y AH: $y = 2$; $h(x) = \dfrac{6x + 7}{2x + 8}$

4. Sea $f : [-\pi; \pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4sen(2x) - 2$. Determinar la imagen de f y hallar los: $x \in [-\pi; \pi]$ para los cuales f alcanza el valor mínimo.

   ☐ Imagen $f(x) = [-6; 2]$; Mínimos en: $\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\}$ ☐ Imagen $f(x) = [-6; 2]$; Mínimos en: $\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$

   ☐ Imagen $f(x) = [6; 2]$; Mínimos en: $\{-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$ √ **Imagen** $f(x) = [-6; 2]$**; Mínimos en:** $\{-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$

1. Sean $f(x) = x^3 - 3x^2$, $P = (1; f(1))$ y $Q = (3; f(3))$. Hallar P y Q y la distancia que hay entre ellos.

   Hallamos los puntos evaluando la función.

   $$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 = -2$$

   Entonces el punto P es $P = (1; -2)$.

   $$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 = 0$$

   Entonces el punto Q es $Q = (3; 0)$.
   Aplicamos la formula de distancia.

   $$d = \sqrt{((3) - (1))^2 + ((0) - (-2))^2}$$

   $$d = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$$

   $$d = \sqrt{4 + 4}$$

   $$d = \sqrt{8}$$

2. Siendo $f(x) = 2x^2 + bx + c$, se pide: determinar b y c, de modo que el punto $(1; -9/2)$ sea el vértice de su gráfico. Para los valores hallados, expresar el conjunto de positividad de f.

   Sabiendo el vértice, nosotros podemos plantear que:

   $$x_v = \frac{-b}{2a}$$

   $$x_v = \frac{-b}{2(2)} = \frac{-b}{4}$$

   Y esto sabemos que vale 1 dado que es dato del ejercicio, por lo que podemos igualar y despejar.

   $$\frac{-b}{4} = 1$$

   $$-b = 4$$

   $$b = -4$$

   Así que podemos decir que la función es $f(x) = 2x^2 - 4x + c$, para hallar c usamos el punto en la función y resolvemos.

$$-\frac{9}{2} = 2(1)^2 - 4(1) + c$$

$$-\frac{9}{2} = 2(1) - 4 + c$$

$$-\frac{9}{2} = 2 - 4 + c$$

$$-\frac{9}{2} = -2 + c$$

$$-\frac{9}{2} + 2 = c$$

$$-\frac{5}{2} = c$$

Así sabemos que la función es $f(x) = 2x^2 - 4x - \frac{5}{2}$

Se nos pide la positividad, así que buscamos sus ceros usando la formula resolvente.

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-5/2)}}{2(2)}$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{4}$$

$$\frac{4 \pm 6}{4}$$

De esto se derivan dos resultados, que son sus ceros, o sea $C^0 : \left\{-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$, analizamos los intervalos que nos quedan, que son $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$; $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2(-1)^2 - 4(-1) - \frac{5}{2} &&= \frac{7}{2} \\ f(0) &= 2(0)^2 - 4(0) - \frac{5}{2} &&= -\frac{5}{2} \\ f(3) &= 2(3)^2 - 4(3) - \frac{5}{2} &&= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Así sabemos que los intervalos positivos son los laterales, o sea que $C^+ : \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$

3. Dadas $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+7}$, $g(x) = 2x+1$, y $h(x) = f \circ g(x)$, calcular $h(x)$ y dar las ecuaciones de todas sus asíntotas.

Componemos $h(x)$.

$$h(x) = \frac{3(2x+1)+4}{(2x+1)+7}$$

$$h(x) = \frac{6x+3+4}{2x+8}$$

$$h(x) = \frac{6x+7}{2x+8}$$

Como $h(x)$ es homografica podemos calcular sus asintotas directamente.

$$\text{AV } x = -\frac{d}{c} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$\text{AH } y = \frac{a}{c} = \frac{6}{2} = 3$$

4. Sea $f : [-\pi; \pi] \leftarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4sen(2x) - 2$. Determinar la imagen de f y hallar los: $x \in [-\pi; \pi]$ para los cuales f alcanza el valor mínimo.

Podemos calcular su imagen, para ello, sabemos que la imagen original de la función seno es $[-1; 1]$, pero, al estar multiplicada por 4, sabemos que se amplifica en dicho valor, por lo cual, nos queda $[-4; 4]$; como ultimo paso, sabemos que se restan 2 unidades, por lo que la función se desplaza esa cantidad hacia abajo, o sea $[-6; 2]$.

Con la imagen, sabemos que los mínimos se hallan en -6, y para hallar los mínimos vamos a igualar la función a este valor y despejar.

$$4sen(2x) - 2 = -6$$

$$4sen(2x) = -4$$

$$sen(2x) = -1$$

Sabemos que para que la función seno de como resultado -1, el angulo debe ser de $270°$ o sea de $\dfrac{3}{2}\pi$, así que igualamos.

$$2x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2}$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$$

Ahora le damos valores enteros a k cuidando que no nos vayamos del intervalo $[-\pi; \pi]$.

$$\begin{aligned} Si k = 1 &\quad = \frac{3}{4}\pi + (1)\pi &\quad = \frac{7}{4}\pi \\ Si k = 0 &\quad = \frac{3}{4}\pi + (0)\pi &\quad = \frac{3}{4}\pi \\ Si k = -1 &\quad = \frac{3}{4}\pi + (-1)\pi &\quad = -\frac{1}{4}\pi \\ Si k = -2 &\quad = \frac{3}{4}\pi + (-2)\pi &\quad = -\frac{5}{4}\pi \end{aligned}$$

Podemos ver que los valores que están en el intervalo son $\left\{-\frac{1}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi\right\}$.

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 3)** **MODELO**

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

> En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta.
> Se debe resolver a partir del enunciado, no de las respuestas.
> Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Hallar C^0 y C^+ de $g \circ f(x)$, siendo $g(x) = x - 6$ y $f(x) = x^2 - x$.

   $\surd$ $C^0 : \{-2; 3\}$ **y** $C^+ : (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ ☐ $C^0 : \{6; 7\}$ y $C^+ : (-\infty; 6) \cup (7; +\infty)$

   ☐ $C^0 : \{6; 7\}$ y $C^+ : (6; 7)$ ☐ $C^0 : \{-2; 3\}$ y $C^+ : (-2; 3)$

2. Obtener la AV y la AH de la función inversa de $f(x) = \dfrac{3x - 2}{4 + 3x}$

   ☐ AV: $x = \dfrac{4}{3}$; AH: $y = 1$ ☐ AV: $x = \dfrac{3}{4}$; AH: $y = -\dfrac{4}{3}$

   $\surd$ **AV:** $x = 1$**; AH:** $y = -\dfrac{4}{3}$ ☐ AV: $x = -\dfrac{4}{3}$; AH: $y = \dfrac{3}{4}$

3. Dada $f(x) = ASen\left(x + \dfrac{3}{4}\pi\right) + B$, calcular $A; B \in \mathbb{R}$ para que su imagen sea $[-2; 6]$.

   $\surd$ $A = 4$ **y** $B = 2$ ☐ $A = 4$ y $B = -2$ ☐ $A = -2$ y $B = 4$ ☐ $A = 5$ y $B = -1$

4. Dada $f(x) = \dfrac{bx^3 + 5x}{x^3 - 2x^2 + ax}$; hallar $a; b \in \mathbb{R}/$ $\exists$AV: $x = -3$; $\exists$AH: $y = 3$.

   ☐ $a = 5$ y $b = 3$ ☐ $a = 15$ y $b = 3$ $\surd$ $a = -15$ **y** $b = 3$ ☐ $a = -5$ y $b = -2$

1. Hallar C^0 y C^+ de $g \circ f(x)$, siendo $g(x) = x - 6$ y $f(x) = x^2 - x$.

Componemos:

$$g \circ f(x) = (x^2 - x) - 6$$
$$g \circ f(x) = x^2 - x - 6$$

Buscamos sus ceros con la formula resolvente.

$$\{x_1; x_2\} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

$$\{x_1; x_2\} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$\{x_1; x_2\} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

De esto sabemos que los ceros son:

$$C^0 : \{-2; 3\}$$

Para calcular su C^+, sabemos que la función es continua y sabemos sus ceros, por lo que podemos separar en tres intervalos: $(-\infty; -2)$, $(-2; 3)$, $(3; +\infty)$, con esto, aplicamos Bolzano.

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^2 - (-3) - 6 &&= 6 \\ f(0) &= (0)^2 - (0) - 6 &&= -6 \\ f(4) &= (4)^2 - (4) - 6 &&= 6 \end{aligned}$$

Sabemos entonces que $C^+ : (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$

2. Obtener la AV y la AH de la funcion inversa de $f(x) = \dfrac{3x - 2}{4 + 3x}$

Calculamos la inversa.

$$y = \frac{3x - 2}{4 + 3x}$$

$$y(4 + 3x) = 3x - 2$$

$$4y + 3xy = 3x - 2$$

$$3xy - 3x = -2 - 4y$$

$$x(3y-3) = -2-4y$$

$$x = \frac{-2-4y}{3y-3}$$

$$y^{-1} = \frac{-2-4x}{3x-3}$$

Ahora, sabiendo que es homografica podemos saber sus asintotas con las formulas.

$$\text{AV: } x = \frac{-d}{c} = \frac{-(-3)}{3} = 1$$

$$\text{AH: } y = \frac{a}{c} = \frac{-4}{3}$$

3. Dada $f(x) = ASen\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) + B$, calcular $A; B \in \mathbb{R}$ para que su imagen sea $[-2; 6]$.

La imagen de la función Seno se puede escribir como:

$$[-A+B; A+B]$$

Siendo A el valor que amplifica a la función y B el valor que desplaza verticalmente la misma. En este caso sabemos que debe ser $[-2; 6]$, así que podemos plantear que:

$$-A+B = -2 \text{ y } A+B = 6$$

Si despejamos B en ambas, nos queda:

$$B = -2+A \text{ y } B = 6-A$$

Igualamos:

$$\begin{gathered} -2+A = 6-A \\ -2-6 = -A-A \\ -8 = -2A \\ 4 = A \end{gathered}$$

Con esto, hallamos B.

$$\begin{gathered} B = 6-4 \\ B = 2 \end{gathered}$$

4. Dada $f(x) = \dfrac{bx^3+5x}{x^3-2x^2+ax}$; hallar $a; b \in \mathbb{R} /\ \exists$AV: $x=-3$; $\exists$AH: $y=3$.

Si sabemos que su AH: $y=3$, podemos plantear lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{bx^3+5x}{x^3-2x^2+ax}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(\dfrac{bx^3}{x^3}+\dfrac{5x}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{2x^2}{x^3}+\dfrac{ax}{x^3}\right)}$$

$$\frac{b}{1}=3$$

$$b=3$$

Así podemos plantear que la función es:

$$f(x)=\frac{3x^3+5x}{x^3-2x^2+ax}$$

Por otro lado, si AV: $x=-3$, sabemos que este valor no pertenece al dominio de $f(x)$, por lo que, si tomamos al denominador y lo evaluamos en -3, el resultado debe ser 0 y con esto podemos hallar a.

$$\begin{gathered}(-3)^3-2(-3)^2+a(-3)=0\\(-27)-2(9)-3a=0\\-27-18=3a\\-45=3a\\-15=a\end{gathered}$$

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 4)** **MODELO**

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Se debe resolver a partir del enunciado, no de las respuestas. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Hallar C^0 y C^- de $g \circ f(x)$, siendo $g(x) = x - 2$ y $f(x) = x^2 - x$.

   ☐ $C^0 : \{-1; 2\}$ y $C^- : (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ ☐ $C^0 : \{2; 3\}$ y $C^- : (-\infty; 3) \cup (2; +\infty)$

   ☐ $C^0 : \{2; 3\}$ y $C^- : (2; 3)$ $\surd$ $C^0 : \{-1; 2\}$ **y** $C^- : (-1; 2)$

2. Hallar el o los puntos que pertenecen a la función constante $y = 2$ cuya distancia al punto $Q = (0; 1)$ vale $\sqrt{2}$.

   $\surd$ $P_1 : (-1; 2)$ **y** $P_2 : (1; 2)$ ☐ $P_1 : (-1; 2)$

   ☐ $P_1 : (-1; 2)$ y $P_2 : (2; 2)$ ☐ $P_1 : (-2; 2)$ y $P_2 : (-1; 1)$

3. Dada $f(x) = \dfrac{3x^3 + 5x}{x^3 - 2x^2 - 15x}$ calcular la ecuación de todas sus asintotas.

   ☐ AV: $x = -3$; $x = 5$ y AH: $y = 5$ ☐ AV: $x = -3$y AH: $y = 3$

   ☐ AV: $x = 5$ y AH: $y = 3$ $\surd$ **AV:** $x = -3$**;** $x = 5$ **y AH:** $y = 3$

4. Obtener la función inversa de $g(x) = -3e^{1/2x-1} + 2$

   $\surd$ $f^{-1}(x) = 2ln\left(\dfrac{2-x}{3}\right) + 2$ ☐ $f^{-1}(x) = 2ln\left(\dfrac{2-x}{3}\right) + 1$

   ☐ $f^{-1}(x) = ln\left(\dfrac{x-2}{3}\right) + 2$ ☐ $f^{-1}(x) = 2ln\left(\dfrac{x-2}{3}\right) + 1$

1. Hallar C^0 y C^- de $g \circ f(x)$, siendo $g(x) = x - 2$ y $f(x) = x^2 - x$.

   Componemos:

$$g \circ f(x) = (x^2 - x) - 2$$
$$g \circ f(x) = x^2 - x - 2$$

   Buscamos sus ceros con la formula resolvente.

$$\{x_1; x_2\} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$\{x_1; x_2\} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\{x_1; x_2\} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

   De esto sabemos que los ceros son:

$$C^0 : \{-1; 2\}$$

   Para calcular su C^-, sabemos que la función es continua y sabemos sus ceros, por lo que podemos separar en tres intervalos: $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; +\infty)$, con esto, aplicamos Bolzano.

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^2 - (-3) - 2 &&= 10 \\ f(0) &= (0)^2 - (0) - 2 &&= -2 \\ f(4) &= (4)^2 - (4) - 2 &&= 10 \end{aligned}$$

   Sabemos entonces que $C^- : (-1; 2)$

2. Hallar el o los puntos que pertenecen a la función constante $y = 2$ cuya distancia al punto $Q = (0; 1)$ vale $\sqrt{2}$.

   Los puntos de la función constante $y = 2$ tienen forma $(x; 2)$ ya que si bien el valor de x puede cambiar, el valor de y siempre es 2, por lo que podemos usarlo como punto junto a Q para la formula de distancia.

$$(\sqrt{2})^2 = (0 - x)^2 + (1 - 2)^2$$
$$2 = x^2 + 1$$
$$1 = x^2$$

   De esto salen dos valores -1 y 1, por lo que los puntos que buscamos son $(-1; 2)$ y $(1; 2)$.

3. Dada $f(x) = \dfrac{3x^3 + 5x}{x^3 - 2x^2 - 15x}$ calcular la ecuación de todas sus asintotas.

Buscamos su dominio.

$$x^3 - 2x^2 - 15x \neq 0$$
$$x(x^2 - 2x - 15) \neq 0$$
$$x(x-5)(x+3) \neq 0$$

De esto, podemos decir que el dominio es:

$$\forall \mathbb{R} - \{-3; 0; 5\}$$

Aplicamos el limite a cada uno.

Limite a -3.

$$\lim_{x \to -3} \frac{3x^3 + 5x}{x^3 - 2x^2 - 15x} = \frac{\to -96}{\to 0} = \to \infty$$

Podemos decir que existe AV en $x = -3$

Limite a 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + 5x}{x^3 - 2x^2 - 15x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Hay que salvar la indeterminación.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(3x^2 + 5)}{x(x-5)(x+3)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 5}{(x-5)(x+3)} = \frac{\to 5}{\to -15}$$

Podemos decir que NO existe AV en $x = 0$

Limite a 5.

$$\lim_{x \to 5} \frac{3x^3 + 5x}{x^3 - 2x^2 - 15x} = \frac{\to 400}{\to 0} = \to \infty$$

Podemos decir que existe AV en $x = 5$

Aplicamos el limite a infinito para ver si hay asintota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 5x}{x^3 - 2x^2 - 15x} = \frac{\to +\infty}{\to +\infty}$$

Salvamos la indeterminación.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 \left(\frac{3x^3}{x^3} + \frac{5x}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} - \frac{15x}{x^3} \right)}$$

$$\frac{\to 3}{\to 1} = \to 3$$

Podemos decir que existe AH en $y = 3$.

4. Obtener la función inversa de $g(x) = -3e^{1/2x-1} + 2$

$$y = -3e^{1/2x-1} + 2$$

$$y - 2 = -3e^{1/2x-1}$$

$$\frac{y-2}{-3} = e^{1/2x-1}$$

$$ln \left(\frac{y-2}{-3} \right) = \frac{1}{2}x - 1$$

$$ln \left(\frac{y-2}{-3} \right) + 1 = \frac{1}{2}x$$

$$2ln \left(\frac{y-2}{-3} \right) + 2 = x$$

$$2ln \left(\frac{x-2}{-3} \right) + 2 = y^{-1}$$

$$2ln \left(\frac{-x+2}{3} \right) + 2 = y^{-1}$$

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 5)** **MODELO**

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Se debe resolver a partir del enunciado, no de las respuestas. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Siendo $f(x)$ una función cuadrática que tiene sus raíces en -6 y 8 y tiene un punto de paso en $(9;-15)$. Encontrar el intervalo de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

   ☐ $I^C : (-1;+\infty)$ e $I^D : (-\infty;-1)$ $\quad\surd$ $I^C : (-\infty;1)$ **e** $I^D : (1;+\infty)$

   ☐ $I^C : (1;+\infty)$ e $I^D : (-\infty;1)$ $\quad$ ☐ $I^C : (-\infty;-1)$ e $I^D : (-1;+\infty)$

2. Sean las siguientes funciones $f(x) = e^{x-1}$ y $g(x) = ln(x-1)$, calcular el dominio de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

   $\surd$ $D_{(f\circ g)(x)} : (1;+\infty)$ **y** $D_{(g\circ f)(x)} : (1;+\infty)$ $\quad$ ☐ $D_{(f\circ g)(x)} : (0;+\infty)$ y $D_{(g\circ f)(x)} : (0;+\infty)$

   ☐ $D_{(f\circ g)(x)} : (-1;+\infty)$ y $D_{(g\circ f)(x)} : (1;+\infty)$ $\quad$ ☐ $D_{(f\circ g)(x)} : (1;+\infty)$ y $D_{(g\circ f)(x)} : (-1;+\infty)$

3. Calcular el conjunto de positividad, de negatividad y la inversa de la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$.

   ☐ $C^+ : (-\infty;-1) \cup (5;+\infty)$; $C^- : (-1;5)$; $f^{-1}(x) = \dfrac{-1+5x}{x-1}$

   ☐ $C^+ : (-\infty;-1) \cup (5;+\infty)$; $C^- : (-1;5)$; $f^{-1}(x) = \dfrac{-1-5x}{x-1}$

   $\surd$ $C^+ : (-\infty;-5) \cup (1;+\infty)$**;** $C^- : (-5;1)$**;** $f^{-1}(x) = \dfrac{-1-5x}{x-1}$

   ☐ $C^+ : (-\infty;-5) \cup (1;+\infty)$; $C^- : (-5;1)$; $f^{-1}(x) = \dfrac{5x-1}{x-1}$

4. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4x+4}$

   ☐ 2 $\quad$ ☐ 1 $\quad$ ☐ 0 $\quad\surd$ 3

1. Siendo $f(x)$ una función cuadrática que tiene sus raíces en -6 y 8 y tiene un punto de paso en $(9;-15)$. Encontrar el intervalo de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Si sabemos las raíces de la función, podemos plantear su forma factorizada, la cual es:

$$y = a(x+6)(x-8)$$

Sabiendo que pasa por $(9;-15)$ podemos averiguar el valor de a.

$$-15 = a(9+6)(9-8)$$
$$-15 = a(15)(1)$$
$$-1 = a$$

Por lo tanto, la función es:

$$y = -1(x+6)(x-8)$$

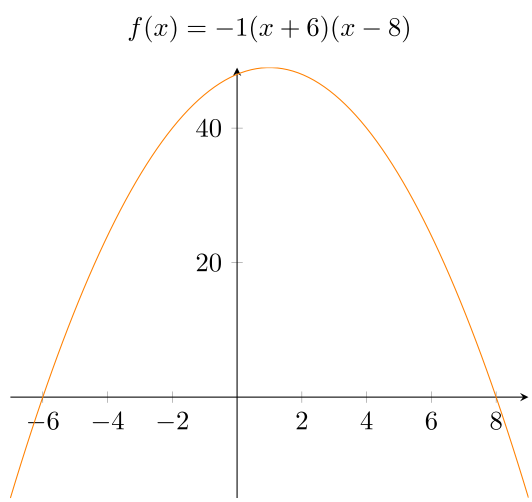
Ahora, para hallar el crecimiento y decrecimiento, necesitamos conocer el vértice, teniendo las raíces podemos calcularlo planteando que:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(-6)+(8)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Si sabemos que la función tiene valor de -1, sabemos que tiene forma de campana, por lo que su crecimiento $I^C : (-\infty; x_v)$ e $I^D : (x_v; +\infty)$.

O sea: $I^C : (-\infty; 1)$ e $I^D : (1; +\infty)$.

Su gráfica es:



2. Sean las siguientes funciones $f(x) = e^{x-1}$ y $g(x) = ln(x-1)$, calcular el dominio de $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Componemos $(f \circ g)(x)$.

$$(f \circ g)(x) = e^{ln(x-1)-1}$$

Podemos calcular el dominio planteando que:

$$\begin{gathered} x - 1 > 0 \\ x > 1 \end{gathered}$$

El dominio de esta función es $(1; +\infty)$

Componemos $(g \circ f)(x)$.

$$(g \circ f)(x) = ln(e^{x-1} - 1)$$

$$(g \circ f)(x) = ln(e^{x-1} - 1)$$

Podemos calcular el dominio planteando que:

$$\begin{gathered} e^{x-1} - 1 > 0 \\ e^{x-1} > 1 \\ x - 1 > ln(1) \\ x - 1 > 0 \\ x > 1 \end{gathered}$$

Por lo cual, el dominio es $(1; +\infty)$.

3. Calcular el conjunto de positividad, de negatividad y la inversa de la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$.

Para calcular la positividad y negatividad hay dos caminos, o bien planteamos las inecuaciones correspondientes, o calculamos su cero y asintota para aplicar Bolzano.
Su cero se calcula como:

$$\frac{x-1}{x+5} = 0$$

$$\begin{gathered} x - 1 = 0 \\ x = 1 \end{gathered}$$

Su asintota la podemos calcular con la formula.

$$\text{AV: } x = \frac{-d}{c} = \frac{-(5)}{1} = -5$$

Para calcular su C^- y C^+, sabemos que la función es continua, sabemos su cero y AV, por lo que podemos separar en tres intervalos: $(-\infty; -5)$, $(-5; 1)$, $(1; +\infty)$, con esto, aplicamos Bolzano.

$$\begin{aligned}
f(-6) &= \frac{(-6)-1}{(-6)+5} &&= 7 \\
f(0) &= \frac{(0)-1}{(0)+5} &&= -\frac{1}{5} \\
f(4) &= \frac{(4)-1}{(4)+5} &&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Sabemos entonces que $C^- : (-5; 1)$ y $C^+ : (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.

Calculamos su inversa.

$$y = \frac{x-1}{x+5}$$

$$y(x+5) = x-1$$

$$yx + 5y = x - 1$$

$$yx - x = -1 - 5y$$

$$x(y-1) = -1 - 5y$$

$$x = \frac{-1-5y}{y-1}$$

$$y^{-1} = \frac{-1-5x}{x-1}$$

4. Calcular $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4}$

Aplicamos el limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Aplicamos Ruffini para factorizar el numerador con divisor 2.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -1 & 0 & 4 \\
 & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Con la tabla armada, el primer coeficiente baja directamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Ahora, ese coeficiente que bajo, se multiplica por el divisor y se coloca en la segunda columna.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Y sumamos la columna

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

Ahora repetimos para llegar al final.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Escribimos el polinomio resultante, siempre bajando un grado al polinomio inicial y agregando al divisor.

$$(x-2)(x^2-x-2)$$

A la función del denominador podemos aplicarle lo mismo o hallar sus raíces con la formula resolvente para pasar de polinomica a factorizada.
Sus raíces son $C^0 : \{2\}$ por lo que tiene raíz doble en 2, su fatorizada se puede escribir como $f(x) = (x-2)(x-2)$ así que podemos decir que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Por lo que hay que continuar factorizando, específicamente hay que factorizar al numerador, cuyo conjunto de ceros es $C^0 : \{-1; 2\}$ por lo que tiene dos raíces simples, su fatorizada se puede escribir como $f(x) = (x+1)(x-2)$ así que podemos decir que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+1) = \to 3$$

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 6)** **MODELO**

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Se debe resolver a partir del enunciado, no de las respuestas. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Calcular el conjunto de positividad de la inversa de $f(x) = \dfrac{4x+3}{2x-4} + 2$

   ☐ $C^+ : \left(\dfrac{5}{4}; 4\right)$ ☐ $C^+ : \left(-\dfrac{5}{4}; 4\right)$ ☐ $C^+ : \left(-\infty; \dfrac{3}{4}\right) \cup (4; +\infty)$ $\surd$ $C^+ : \left(-\infty; \dfrac{5}{4}\right) \cup (4; +\infty)$

2. Calcular $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}$

   ☐ 0 ☐ 1 $\surd$ 2 ☐ 3

3. Calcular la intersección entre la imagen de $f(x)$ y el dominio de la inversa de $f(x)$, siendo $f(x) = 2^{x-2} + 1$.

   $\surd$ $I_f \cap D_{f^{-1}} : (1; +\infty)$ ☐ $I_f \cap D_{f^{-1}} : \emptyset$ ☐ $I_f \cap D_{f^{-1}} : \mathbb{R}$ ☐ $I_f \cap D_{f^{-1}} : (0; +\infty)$

4. Calcular la unión entre el conjunto el conjunto de negatividad de $f(x) = 2^{x-2} - 2$ y el conjunto de positividad de $g(x) = 3^{x-3} - 3$

   ☐ $C^- \cup C^+ : (3; +\infty)$ ☐ $C^- \cup C^+ : \emptyset$ ☐ $C^- \cup C^+ : \mathbb{R}$ $\surd$ $C^- \cup C^+ : (-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$

1. Calcular el conjunto de positividad de la inversa de $f(x) = \dfrac{4x+3}{2x-4} + 2$

Calculamos la inversa.

$$y = \frac{4x+3}{2x-4} + 2$$

$$y = \frac{4x+3+2(2x-4)}{2x-4}$$

$$y = \frac{4x+3+4x-8}{2x-4}$$

$$y = \frac{8x-5}{2x-4}$$

$$y(2x-4) = 8x-5$$

$$2xy - 4y = 8x - 5$$

$$2xy - 8x = -5 + 4y$$

$$x(2y-8) = -5 + 4y$$

$$x = \frac{-5+4y}{2y-8}$$

$$y^{-1} = \frac{-5+4x}{2x-8}$$

Para hallar la positividad buscamos que $f(x) > 0$

$$\frac{-5+4x}{2x-8} > 0$$

Como se nos pide que $\dfrac{A}{B} > 0$ planteamos los casos de signos iguales ($+/+$ y $-/-$).

Primer caso:

$$\mathbf{A > 0 \wedge B > 0}: \quad \begin{array}{ccc} -5+4x > 0 & \wedge & 2x-8 > 0 \\ x > \dfrac{5}{4} & \wedge & x > 4 \end{array}$$

Solución primer caso $(4; +\infty)$

Segundo caso:

$$\mathbf{A < 0 \wedge B < 0}: \quad \begin{array}{ccc} -5+4x < 0 & \wedge & 2x-8 < 0 \\ x < \dfrac{5}{4} & \wedge & x < 4 \end{array}$$

Solución segundo caso $\left(-\infty; \dfrac{5}{4}\right)$

$$\text{Solución total: } \left(-\infty; \frac{5}{4}\right) \cup (4; +\infty)$$

2. Calcular $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}$

Aplicamos el limite:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

En ambos aplicamos Ruffini usando como divisor el -3.
El numerador nos queda:

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 5 & 3 & -9 \\ & & -3 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

Nos queda entonces: $(x + 3)(x^2 + 2x - 3)$.
El denominador nos queda:

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 7 & 15 & 9 \\ & & -3 & -12 & -9 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

Nos queda entonces: $(x + 3)(x^2 + 4x + 3)$.
El limite nos queda:

$$\lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x^2 + 2x - 3)}{(x+3)(x^2 + 4x + 3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Aplicamos podemos volver a aplicar Ruffini en ambas usando el -3 o usar la resolvente para hallar sus ceros, si lo hacemos, obtenemos que el numerador tiene conjunto $C^0\{-3; 1\}$, por lo tanto, se puede expresar como $(x + 3)(x - 1)$, y el denominador tiene conjunto $C^0\{-3; -1\}$ o sea que es $(x + 3)(x + 1)$.
El limite nos queda:

$$\lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x \to -3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{\to -4}{\to -2} = \to 2$$

3. Calcular la intersección entre la imagen de $f(x)$ y el dominio de la inversa de $f(x)$, siendo $f(x) = 2^{x-2} + 1$.

En primer instancia, la imagen de $f(x)$ y el dominio de la inversa de $f(x)$ son la misma cosa, así que al calcular una, la otra queda exactamente igual.
Calculamos la inversa.

$$y = 2^{x-2} + 1$$

$$y - 1 = 2^{x-2}$$

$$log_2(y-1) = x - 2$$

$$log_2(y-1) + 2 = x$$

$$log_2(x-1) + 2 = y^{-1}$$

Ahora, sabemos que es un logaritmo de base positiva, ya que es de base 2, el cual tiene propiedades similares al conocido ln en particular, el dominio, que es lo que nos importa, que se sabe que para ln debe cumplir con ser mayor que cero su argumento, así que podemos decir que:

$$x - 1 > 0$$
$$x > 1$$

Su dominio entonces es $(1; +\infty)$ y como dijimos, es también la imagen de $f(x)$, por lo tanto, la respuesta del ejercicio.

4. Calcular la unión entre el conjunto el conjunto de negatividad de $f(x) = 2^{x-2} - 2$ y el conjunto de positividad de $g(x) = 3^{x-3} - 3$

Para calcular positividad o negatividad, necesitamos los ceros de las funciones y posteriormente, aplicar Bolzano. Ambas son funciones exponenciales y en sus exponentes no hay funciones que tengan problemas, así que podemos decir que el dominio de ambas es $\forall\mathbb{R}$.

Buscamos los ceros de la primera.

$$2^{x-2} - 2 = 0$$
$$2^{x-2} = 2$$
$$x - 2 = log_2(2)$$
$$x - 2 = 1$$
$$x = 3$$

Sabemos entonces que tiene $C^0\{3\}$. Si evaluamos a la función en los intervalos $(-\infty; 3)$ y $(3; +\infty)$ obtendremos su positividad y negatividad.

$$\begin{aligned} f(0) &= 2^{(0)-2} - 2 &&= -1{,}75 \\ f(4) &= 2^{(4)-2} - 2 &&= 2 \end{aligned}$$

Entonces podemos decir que $C^+ : (3; +\infty)$ y $C^- : (-\infty; 3)$.

Con la segunda hacemos lo mismo.
Buscamos los ceros.

$$3^{x-3} - 3 = 0$$
$$3^{x-3} = 3$$
$$x - 3 = log_3(3)$$
$$x - 3 = 1$$
$$x = 4$$

Sabemos entonces que tiene $C^0\{4\}$. Si evaluamos a la función en los intervalos $(-\infty;4)$ y $(4;+\infty)$ obtendremos su positividad y negatividad.

$$\begin{aligned} f(0) &= 3^{(0)-3} - 3 &= -2,96 \\ f(5) &= 3^{(5)-3} - 3 &= 6 \end{aligned}$$

Entonces podemos decir que $C^+ : (4;+\infty)$ y $C^- : (-\infty;4)$.

Ahora bien, la union de los conjuntos es $(-\infty;3) \cup (4;+\infty)$

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 7)** **MODELO**

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Se debe resolver a partir del enunciado, no de las respuestas. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Escribir la solución del siguiente conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}/\dfrac{2x+4}{x^2+1} > 0\right\}$

   ☐ $x \neq \pm 1$; $x > -2$ √ $x > -2$ ☐ $x \neq \pm 1$; $x > 2$ ☐ $x > 2$

2. Calcular los conjuntos de positividad y negatividad de la función polinómica que pasa por los siguientes puntos: $f(2) = f(1) = f(-1) = 0$; $f(0) = 2$

   ☐ $C^+ : (-\infty; -1) \cup (1; 2)$; $C^- : (-1; 1) \cup (2; +\infty)$ ☐ $C^+ : (-1; 2) \cup (2; +\infty)$; $C^- : (-\infty; -1) \cup (-1; 2)$
   √ $C^+ : (-1; 1) \cup (2; +\infty)$; $C^- : (-\infty; -1) \cup (1; 2)$ ☐ $C^+ : (-\infty; 1) \cup (1; 2)$; $C^- : (1; 2) \cup (2; +\infty)$

3. Calcular la $Im(f \circ g)$ sabiendo que $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = ln(x-2)$.

   √ $Im(f \circ g) : y \in \mathbb{R}$ ☐ $Im(f \circ g) : y \in \mathbb{R}/y \geq 2$ ☐ $Im(f \circ g) : y \in \mathbb{R}/y > 2$ ☐ $Im(f \circ g) : y \in \mathbb{R}/y < 2$

4. Dar la imagen de la función $f(x) = e^{6x-18}$

   ☐ $Im(f(x)) : y > 3$ ☐ $Im(f(x)) : y > 3; y > 0$ ☐ $Im(f(x)) : y \geq 0$ √ $Im(f(x)) : y > 0$

1. Escribir la solución del siguiente conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x+4}{x^2+1} > 0\right\}$

   Sabemos que hay que resolver la siguiente inecuacion:

   $$\frac{2x+4}{x^2+1} > 0$$

   Podemos ver que el denominador nunca podrá ser menor o igual a cero, debido a que:

   $$x^2 + 1 \leq 0$$

   Si intentamos calcular el valor de "x" notaremos:

   $$x^2 \leq -1$$
   $$x \leq \sqrt{-1}$$

   Por lo tanto, el denominador siempre será positivo; En consecuencia, el numerador será:

   $$2x + 4 > 0$$
   $$2x > -4$$
   $$x > -2$$

   Siendo la respuesta final del ejercicio.

2. Calcular los conjuntos de positividad y negatividad de la función polinómica que pasa por los siguientes puntos: $f(2) = f(-1) = f(-1) = 0$; $f(0) = 2$

   Podemos observar que esta función cuenta con 3 raíces o ceros. Aplicaremos la forma factorizada de esa ecuación polinómica.

   $$f(x) = a(x-2)(x-1)(x+1)$$

   Reemplazaremos el valor de $f(0) = 2$

   $$f(0) = a(0-2)(0-1)(0+1) = 2$$
   $$a(-2)(-1)(+1) = 2$$
   $$a2 = 2$$
   $$a = 1$$

   Entonces, la función será:

   $$f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$$

Las raíces de la función son: $C^0 : \{-1; 1; 2\}$

Si tomamos un valor cualquiera anterior a $x = -1$.

$$f(-2) < 0 \to C^-$$

Si tomamos un valor cualquiera perteneciente al intervalo $(-1; 1)$

$$f(0) > 0 \to C^+$$

Si tomamos un valor cualquiera perteneciente al intervalo $(1; 2)$

$$f(1,5) < 0 \to C^-$$

Si tomamos un valor cualquiera posterior a $x = 2$

$$f(3) > 0 \to C^+$$

Por lo tanto, la solución será:

$$\begin{gathered} C^+ = (-1; 1) \cup (2; +\infty) \\ C^- = (-\infty; -1) \cup (1; 2) \end{gathered}$$

3. Calcular la $Im(f \circ g)$ sabiendo que $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = ln(x-2)$.

Primero armaremos la función que debemos trabajar:

$$f \circ g(x) = \sqrt{ln(x-2) - 2}$$

Intercambiaremos las variables para calcular la inversa.

$$x = \sqrt{ln(y-2) - 2}$$

Despejaremos el valor de la variable x

$$\begin{gathered} x = \sqrt{ln(y-2) - 2} \\ x^2 = ln(y-2) - 2 \\ x^2 + 2 = ln(y-2) \\ e^{x^2+2} = y - 2 \\ e^{x^2+2} + 2 = y \end{gathered}$$

En esta función no tenemos restricciones de dominio. Por lo tanto, la imagen buscada será el conjunto completo de todos números Reales.

4. Dar la imagen de la función $f(x) = e^{6x-18}$

Intercambiamos las variables para hallar la función inversa.

$$x = e^{6y-18}$$

Aplicamos logaritmos naturales en ambos miembros.

$$ln(x) = ln(e^{6y-18})$$
$$ln(x) = (6y-18)ln(e)$$
$$ln(x) = 6y - 18$$
$$ln(x) + 18 = 6y$$

$$\frac{ln(x)+18}{6} = y^{-1}$$

La única restricción de dominio en esta función es la que corresponde al logaritmo natural; por lo tanto, la imagen quedará:

$$x > 0$$

O sea $(0; +\infty)$ y esto se traduce en $y > 0$ para la imagen.

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 8)** **MODELO**

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Se debe resolver a partir del enunciado, no de las respuestas. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Calcular cuál es la mayor de las distancias entre cada una de las raíces o ceros y el vértice de la función: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

   ☐ $|d| = 4$ ☐ $|d| = -8{,}25$ ☐ $|d| = 2$ $\surd$ $|d| = 8{,}25$

2. Calcular la distancia existente entre los puntos de intersección entre las funciones dadas a continuación: $f(x)) = 2x^2 + 4x - 6$; $g(x) = 2x$

   ☐ $|d| = 1$ ☐ $|d| = \pm 8{,}06$ $\surd$ $|d| = 8{,}06$ ☐ $|d| = 8$

3. Calcular, si es que existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función $h(x) = fog(x)$; sabiendo que $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$; $g(x) = x^2 - 2$

   ☐ AV: $x = 2; x = -2$; AH: $y = 0$ ☐ AV: $x = 2; x = -2$; AH: $y = +\infty$

   $\surd$ **AV:** $x = 2; x = -2$**; AH:** $\nexists$ ☐ AV: $x = 2$; AH: $\nexists$

4. Calcular la imagen de la siguiente función en el intervalo de dominio $\left[-\dfrac{1}{2}\pi; \dfrac{1}{2}\pi\right]$: $f(x) = 2cos(3x) - 3$

   ☐ $Im : [-5; 1]$ $\surd$ $Im : [-5; -1]$ ☐ $Im : [-2; 2]$ ☐ $Im : [-3; 3]$

1. Calcular cuál es la mayor de las distancias entre cada una de las raíces o ceros y el vértice de la función: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

   Comenzaremos calculando las raíces o ceros de la función cuadrática, aplicando la fórmula resolvente.

$$\frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)}$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4}$$

$$\frac{-4 \pm 8}{4}$$

   $x_1 = -3$; $x_2 = 1$ osea que $C^0 : -3; 1$

   Las coordenadas de los ceros serán: $P_1 = (-3; 0)$ y $P_2 = (1; 0)$

   A continuación calcularemos las coordenadas del vértice. Para ello, utilizaremos la fórmula correspondiente.

$$x_v = \frac{-(4)}{2(2)}$$

$$x_v = -1$$

$$f(-1) = -8$$

$$y_v = -8$$

   Las coordenadas del vértice serán: $V = (-1; -8)$

   Ambas raíces son equidistantes con el vértice por propiedad, por lo que no es necesario calcular las distancias de ambas raíces al vértice. En consecuencia, utilizaremos la fórmula para el cálculo de la distancia entre uno de los ceros y el vértice de la parábola.

$$|d| = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (-8 - 0)^2}$$

$$|d| = 8{,}25$$

2. Calcular la distancia existente entre los puntos de intersección entre las funciones dadas a continuación: $f(x)) = 2x^2 + 4x - 6$; $g(x) = 2x$

   Para calcular la intersección entre las dos funciones, debemos igualarlas.

$$f(x) = g(x)$$

$$2x^2 + 4x - 6 = 2x$$
$$2x^2 + 4x - 6 - 2x = 0$$
$$2x^2 + 2x - 6 = 0$$

Aplicamos la fórmula resolvente para calcular los valores de X.

$$\frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 + 48}}{4}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{52}}{4}$$

$$x_1 = 1,30;\ x_2 = -2,30$$

Reemplazando en la función, hallamos los valores de Y correspondientes.

$$y_1 = 2,60;\ y_2 = -4{,}60$$

En consecuencia, utilizaremos la fórmula para el cálculo de la distancia entre dos puntos.

$$|d| = \sqrt{(1{,}30 + 2{,}30)^2 + (2{,}60 + 4{,}60)^2}$$

$$|d| = 8{,}06$$

3. Calcular, si es que existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función $h(x) = fog(x)$; sabiendo que $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$; $g(x) = x^2 - 2$

En primer lugar, deberemos hallar la composición de funciones $h(x) = f \circ g(x)$

$$h(x) = \frac{(x^2-2)^2 + 1}{(x^2-2) - 2}$$

$$h(x) = \frac{(x^2-2)(x^2-2) + 1}{x^2 - 4}$$

$$h(x) = \frac{(x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4) + 1}{x^2 - 4}$$

$$h(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 5}{x^2 - 4}$$

Para calcular las Asíntotas Verticales, debemos realizar el cálculo de dominio, por lo que deberemos calcular los valores de la variable x para que el denominador no sea nulo.

$$x^2 - 4 \neq 0$$
$$x^2 \neq 4$$
$$x \neq \pm 2$$

A continuación resolveremos los límites para cada uno de los valores hallados.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 4x^2 + 5}{x^2 - 4} = \frac{\to 5}{\to 0} = \to \infty$$

Por esto sabemos que existe AV en $x = 2$.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 4x^2 + 5}{x^2 - 4} = \frac{\to 5}{\to 0} = \to \infty$$

Por esto sabemos que existe AV en $x = -2$.

A continuación resolveremos el límite para calcular la Asíntota Horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 4x^2 + 5}{x^2 - 4} = \frac{\to +\infty}{\to +\infty}$$

Salvamos la indeterminacion.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 \left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{4x^2}{x^4} + \frac{5}{x^4} \right)}{x^4 \left(\frac{x^2}{x^4} - \frac{4}{x^4} \right)} = \frac{\to 1}{\to 0} = \to +\infty$$

Como obtuvimos $\to +\infty$ sabemos que no existe asintota horizontal.

4. Calcular la imagen de la siguiente función en el intervalo de dominio $\left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi \right]$: $f(x) = 2cos(3x) - 3$

Para calcular la imagen de una función trigonométrica, debo observar el valor de la semi amplitud (el número que multiplica a la palabra cos; en este caso es el 2), al cual se le suma el desplazamiento vertical (el número que suma o resta después del paréntesis del coseno; en este caso es el -3).
En consecuencia, el límite inferior de la Imagen será:

$$\text{Lim.inf.: } -2 - 3 = -5$$

El límite superior de la Imagen será:

$$\text{Lim.sup.: } 2 - 3 = -1$$

Por lo tanto, la imagen será:

$$\text{Im: } [-5; -1]$$

En este caso, los datos del dominio no son necesarios para calcular la imagen de la función.

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 9)** **MODELO**

Datos del alumno:

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Dada la recta que pasa por $(4;-6)$ y $(2;2)$, hallar $(10;f(10))$, $(0;f(0))$ y calcular la distancia entre ellos.

   $\surd$ $d = 41,23$ ☐ $d = 4,23$ ☐ $d = 1,23$ ☐ $d = 23,41$

2. Hallar la forma polinomica de la función cuadrática que cumple $f(2) = f(5) = 0$ y $f(4) = 10$

   ☐ $y = -5x^2 - 35x - 50$ $\surd$ $y = -5x^2 + 35x - 50$ ☐ $y = -5x^2 + 35x + 50$ ☐ $y = 5x^2 + 35x - 50$

3. Hallar las ecuaciones de todas las asintotas de $f(x) = \dfrac{4x^2 + 4x - 120}{x^3 - 11x^2 + 30x}$

   ☐ AV en $x = 5$, $x = 6$ y AH en $y = 0$ ☐ AV en $x = 0$, $x = 5$ y AH en $y = 0$

   ☐ AV en $x = 0$, $x = 6$, $x = 5$ y AH en $y = 0$ $\surd$ **AV en $x = 0$, $x = 6$ y AH en $y = 0$**

4. Sean $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2}{x - 3}$, $g(x) = ln\,(x + 1)$ y $h(x) = g \circ f(x)$. Hallar $h(x)$ y dar su dominio.

   $\surd$ $(-1; \frac{1}{2}) \cup (3; +\infty)$ ☐ $(-1; \frac{1}{2})$ ☐ $(3; +\infty)$ ☐ $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

1. Dada la recta que pasa por $(4; -6)$ y $(2; 2)$, hallar $(10; f(10))$, $(0; f(0))$ y calcular la distancia entre ellos.

   Comenzamos por hallar la recta que pasa por los puntos, para ello, buscamos la pendiente de la recta con la formula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{(-6) - (2)}{(4) - (2)}$$

$$m = \frac{-8}{2}$$

$$m = -4$$

   Sabiendo esto, armamos la ecuación:

$$y = -4x + b$$

   Sustituimos cualquiera de los puntos para hallar b, en este caso usamos el $(2; 2)$:

$$2 = -4(2) + b$$
$$2 = -8 + b$$
$$10 = b$$

   La recta entonces es:

$$y = -4x + 10$$

   Con esto, sustituimos el punto $(10; f(10))$ para hallar la coordenada y del mismo.

$$y = -4(10) + 10$$
$$y = -40 + 10$$
$$y = -30$$

   El punto es $(10; -30)$.
   Ahora hacemos lo mismo con $(0; f(0))$

$$y = -4(0) + 10$$
$$y = 10$$

   El punto es $(0; 10)$.
   Con ambos puntos calculados, usamos la formula de distancia y llegamos al final del ejercicio.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{((10) - (0))^2 + ((-30) - (10))^2}$$

$$d = \sqrt{(10)^2 + (-40)^2}$$

$$d = \sqrt{(100) + (1600)}$$

$$d = \sqrt{1700} = 41,23$$

2. Hallar la forma polinomica de la función cuadrática que cumple $f(2) = f(5) = 0$ y $f(4) = 10$

   Se nos dice que $f(2) = f(5) = 0$, con esto sabemos que sus ceros son $x = 2$ y $x = 5$ y podemos escribir su forma factorizada como:

$$y = a(x - 2)(x - 5)$$

   Ahora, usamos el punto $f(4) = 10$ para hallar el valor de a:

$$10 = a(4 - 2)(4 - 5)$$

$$10 = a(2)(-1)$$

$$10 = a(-2)$$

$$-5 = a$$

   Nos queda:

$$y = -5(x - 2)(x - 5)$$

   Para hallar la forma polinomica tenemos que comenzar a multiplicar todo y llegaremos al final del ejercicio.

$$y = -5(x - 2)(x - 5)$$

$$y = -5(x^2 - 5x - 2x + 10)$$

$$y = -5(x^2 - 7x + 10)$$

$$y = -5x^2 + 35x - 50$$

3. Hallar las ecuaciones de todas las asintotas de $f(x) = \dfrac{4x^2 + 4x - 120}{x^3 - 11x^2 + 30x}$

   Comenzamos por hallar el dominio, para eso desigualamos el denominador a 0 y resolvemos.

$$x^3 - 11x^2 + 30x \neq 0$$

$$x(x^2 - 11x + 30) \neq 0$$

   De ahí obtenemos que una de las soluciones es $x = 0$ y aplicamos la formula resolvente para hallar las otras dos, las cuales son $x = 5$ y $x = 6$, con esto, sabemos que el dominio es:

$$\forall \mathbb{R} - \{0; 5; 6\}$$

Aplicamos el limite a cada uno para ver que ocurre en cada valor.

Aplicamos el limite a $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2 + 4x - 120}{x^3 - 11x^2 + 30x} = \frac{\to -120}{\to 0} = \to \infty$$

Con esto, sabemos que existe AV en $x = 0$
Aplicamos el limite a $x = 5$

$$\lim_{x \to 5} \frac{4x^2 + 4x - 120}{x^3 - 11x^2 + 30x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Esto es una indeterminación, por lo que debemos salvarla, para eso, factorizamos ambos polinomios, para factorizar el de arriba aplicamos la formula resolvente y nos queda que tiene como ceros a $x = -6$ y $x = 5$.
Al denominador ya conocemos sus factores desde el momento en que buscamos el dominio.
Entonces, la expresión nos queda como

$$\lim_{x \to 5} \frac{4(x+6)(x-5)}{x(x-5)(x-6)}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{4(x+6)}{x(x-6)} = \frac{\to 44}{\to -5}$$

Con esto, sabemos que no existe AV en $x = 5$
Aplicamos el limite a $x = 6$

$$\lim_{x \to 6} \frac{4x^2 + 4x - 120}{x^3 - 11x^2 + 30x} = \frac{\to 48}{\to 0} = \to \infty$$

Con esto, sabemos que existe AV en $x = 6$
Aplicamos el limite tendiendo a infinito para buscar si tiene asintota horizontal.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 4x - 120}{x^3 - 11x^2 + 30x} = \frac{\to \infty}{\to \infty}$$

Esto es una indeterminación, por lo que debemos salvarla dividiendo por la variable de mayor grado, en este caso x^3.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 \left(\frac{4x^2}{x^3} + \frac{4x}{x^3} - \frac{120}{x^3} \right)}{x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{11x^2}{x^3} + \frac{30x}{x^3} \right)} = \frac{(\to 0) + (\to 0) - (\to 0)}{1 - (\to 0) + (\to 0)} = \frac{\to 0}{\to 1} = \to 0$$

Con esto, sabemos que existe AH en $y = 0$

4. Sean $f(x) = \dfrac{2x^2+2}{x-3}$, $g(x) = ln\,(x+1)$ y $h(x) = g \circ f(x)$. Hallar $h(x)$ y dar su dominio.

Componemos $h(x)$:

$$h(x) = ln\left(\frac{2x^2+2}{x-3}+1\right)$$

Teniendo la función, vemos que es una función logaritmo natural, y para hallar su dominio, tomamos el argumento y buscamos que sea mayor a 0.

$$\frac{2x^2+2}{x-3}+1 > 0$$

$$\frac{(2x^2+2)+(x-3)}{x-3} > 0$$

$$\frac{2x^2+2+x-3}{x-3} > 0$$

$$\frac{2x^2+x-1}{x-3} > 0$$

Ahora, tenemos que plantear los casos para resolver, pero antes vamos a factorizar el numerador.

$$\frac{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-3} > 0$$

Como se nos pide que $\dfrac{A}{B} > 0$ planteamos los casos de signos desiguales $(+/+$ y $-/-)$.

Primer caso:

$$\mathbf{A > 0 \wedge B > 0}: \quad \begin{array}{ccc} (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) > 0 & \wedge & x-3>0 \\ (-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right) & \wedge & x>3 \end{array}$$

Solución primer caso $(3;+\infty)$

Segundo caso:

$$\mathbf{A < 0 \wedge B < 0}: \quad \begin{array}{ccc} (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) < 0 & \wedge & x-3<0 \\ \left(-1;\frac{1}{2}\right) & \wedge & x<3 \end{array}$$

Solución segundo caso $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$

$$\text{Solución total: } \left(-1;\frac{1}{2}\right)\cup(3;+\infty)$$

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 10)** **MODELO**

Datos del alumno:

Apellido y Nombres: ________________________________

DNI: ________________________________

Fecha y Comision: ________________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Escribir como intervalo o union de intervalos el conjunto $A = \left\{ x \in \Re / \dfrac{2x^2}{x-5} > -5 \right\}$

   √ $(-5; \frac{5}{2}) \cup (5; +\infty)$ ☐ $(-5; \frac{5}{2})$ ☐ $(5; +\infty)$ ☐ $(-\infty; \frac{5}{2}) \cup (5; +\infty)$

2. Dar el conjunto de ceros, de positividad y de negatividad de la funcion $f(x) = -3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 54x$, sabiendo que $f(-2) = 0$.

   ☐ $C^0\{0; 3\}$, $C^+(-\infty; 0)$ y $C^-(0; 3) \cup (3; +\infty)$

   √ $C^0\{-2; 0; 3\}$, $C^+(-2; 0)$ **y** $C^-(-\infty; -2) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$

   ☐ $C^0\{-2; 0; 3\}$, $C^+(-2; 0)$ y $C^-(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$

   ☐ $C^0\{-2; 3\}$, $C^+(-2; 3)$ y $C^-(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$

3. Calcular $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^3 - 5x^2 - 4x + 20}{x^3 - 7x^2 - 5x + 75}$

   ☐ 5 ☐ 0 ☐ -5 √ ∞

4. Sea $f(x) = -4cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 2\sqrt{3}$, hallar sus ceros para $x \in [-2\pi; 3\pi]$

   √ $x = -\frac{4}{3}\pi$, $x = -\frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi$, $x = \frac{8}{3}\pi$, $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = -\frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$, $x = \frac{17}{6}\pi$

   ☐ $x = -\frac{4}{3}\pi$, $x = -\frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi$, $x = \frac{8}{3}\pi$, $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$, $x = \frac{14}{6}\pi$

   ☐ $x = -\frac{4}{3}\pi$, $x = -\frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{2}{2}\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi$, $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = -\frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$, $x = \frac{12}{6}\pi$

   ☐ $x = -\frac{4}{3}\pi$, $x = -\frac{1}{3}\pi$, $x = \frac{3}{3}\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi$, $x = \frac{3}{3}\pi$, $x = -\frac{7}{6}\pi$, $x = -\frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{5}{8}\pi$, $x = \frac{31}{6}\pi$, $x = \frac{17}{6}\pi$

1. Escribir como intervalo o unión de intervalos el conjunto
   $A = \{x \in \Re / \frac{2x^2}{x-5} > -5\}$

   Primero tomamos el conjunto y lo desigualamos con 0, para ello tenemos que agrupar todo en una sola fracción.

$$\frac{2x^2}{x-5} > -5$$

$$\frac{2x^2}{x-5} + 5 > 0$$

$$\frac{2x^2 + 5(x-5)}{x-5} > 0$$

$$\frac{2\,(x+5)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{x-5} > 0$$

   Ahora, tenemos que plantear los casos para resolver, pero antes vamos a factorizar el numerador.

$$\frac{2\,(x+5)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{x-5} > 0$$

   Como se nos pide que $\dfrac{A}{B} > 0$ planteamos los casos de signos desiguales $(+/+ \text{ y } -/-)$.

   Primer caso:

$$\mathbf{A > 0 \wedge B > 0:} \quad \begin{array}{ccc} 2\,(x+5)\left(x-\frac{5}{2}\right) > 0 & \wedge & x-5>0 \\ (-\infty;-5) \cup \left(\frac{5}{2};+\infty\right) & \wedge & x>5 \end{array}$$

   Solución primer caso $(5;+\infty)$

   Segundo caso:

$$\mathbf{A < 0 \wedge B < 0:} \quad \begin{array}{ccc} 2\,(x+5)\left(x-\frac{5}{2}\right) < 0 & \wedge & x-5<0 \\ \left(-5;\frac{5}{2}\right) & \wedge & x<5 \end{array}$$

   Solución segundo caso $\left(-5;\dfrac{5}{2}\right)$

$$\text{Solución total: } \left(-5;\frac{5}{2}\right) \cup (5;+\infty)$$

2. Dar el conjunto de ceros, de positividad y de negatividad de la función $f(x) = -3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 54x$, sabiendo que $f(-2) = 0$.

   Usamos factor común para extraer la variable y simplificar la función.

$$f(x) = -3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 54x$$

$$f(x) = x\left(-3x^3 + 12x^2 + 9x - 54\right)$$

NOTA: se puede sacar también factor común 3. En este caso no lo hacemos. Se llega al mismo resultado con los dos caminos.

Aplicamos Ruffini para factorizar el numerador con divisor -2.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & -3 & 12 & 9 & -54 \\ & & & & \\ \hline \end{array}$$

Con la tabla armada, el primer coeficiente baja directamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & -3 & 12 & 9 & -54 \\ & & & & \\ \hline & -3 & & & \end{array}$$

Ahora, ese coeficiente que bajo, se multiplica por el divisor y se coloca en la segunda columna.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & -3 & 12 & 9 & -54 \\ & & 6 & & \\ \hline & -3 & & & \end{array}$$

Y sumamos la columna

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & -3 & 12 & 9 & -54 \\ & & 6 & & \\ \hline & -3 & 18 & & \end{array}$$

Ahora repetimos para llegar al final.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & -3 & 12 & 9 & -54 \\ & & 6 & -36 & 54 \\ \hline & -3 & 18 & -27 & 0 \end{array}$$

Escribimos el polinomio resultante, siempre bajando un grado al polinomio inicial y agregando al divisor.

$$x(x+2)(-3x^2 + 18x - 27)$$

Pasamos a factorizada la función cuadrática aplicando la formula resolvente, la misma tiene un cero doble en $x = 3$.

$$x(x+2)\left(-3(x-3)^2\right)$$

De esto sabemos que su conjunto de ceros es:

$$C^0 : \{-2; 0; 3\}$$

Si evaluamos a la función en los intervalos $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 3)$ y $(3; +\infty)$ obtendremos su positividad y negatividad.

$$\begin{array}{rll} f(-3) & = (-3)((-3)+2)\left(-3((-3)-3)^2\right) & = -324 \\ f(-1) & = (-1)((-1)+2)\left(-3((-1)-3)^2\right) & = 48 \\ f(1) & = (1)((1)+2)\left(-3((1)-3)^2\right) & = -36 \\ f(4) & = (4)((4)+2)\left(-3((4)-3)^2\right) & = -72 \end{array}$$

Entonces podemos decir que $C^+ : (-2;0)$ y $C^- : (-\infty;-2) \cup (0;3) \cup (3;+\infty)$.

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-5x^2-4x+20}{x^3-7x^2-5x+75}$

   Aplicamos el limite:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3-5x^2-4x+20}{x^3-7x^2-5x+75} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Esto es una indeterminación, por lo cual, hay que salvarla.
Como no hay forma de factor común o diferencia de cuadrados, se puede optar por Ruffini, para ello, usamos el $x=5$ ya que es justamente donde ambos tienden a valer 0.
Aplicamos Ruffini para factorizar el numerador.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -5 & -4 & 20 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Con la tabla armada, el primer coeficiente baja directamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -5 & -4 & 20 \\ & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Ahora, ese coeficiente que bajo, se multiplica por el divisor y se coloca en la segunda columna.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -5 & -4 & 20 \\ & & 5 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Y sumamos la columna

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -5 & -4 & 20 \\ & & 5 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

Ahora repetimos para llegar al final.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -5 & -4 & 20 \\ & & 5 & 0 & -20 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Escribimos el polinomio resultante, siempre bajando un grado al polinomio inicial y agregando al divisor.

$$(x-5)(x^2-4)$$

Aplicamos Ruffini para factorizar el denominador.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -7 & -5 & 75 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Con la tabla armada, el primer coeficiente baja directamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -7 & -5 & 75 \\ & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Ahora, ese coeficiente que bajo, se multiplica por el divisor y se coloca en la segunda columna.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -7 & -5 & 75 \\ & & 5 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Y sumamos la columna

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -7 & -5 & 75 \\ & & 5 & & \\ \hline & 1 & -2 & & \end{array}$$

Ahora repetimos para llegar al final.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -7 & -5 & 75 \\ & & 5 & -10 & -75 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & 0 \end{array}$$

Escribimos el polinomio resultante, siempre bajando un grado al polinomio inicial y agregando al divisor.

$$(x-5)(x^2-2x-15)$$

Reescribimos el limite y aplicamos.

$$\lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x^2-4)}{(x-5)(x^2-2x-15)} = \lim_{x\to 5} \frac{x^2-4}{x^2-2x-15} = \frac{\to 21}{\to 0} = \to \infty$$

4. Sea $f(x) = -4cos(2x - \frac{\pi}{2}) - 2\sqrt{3}$, hallar sus ceros para $x \in [-2\pi; 3\pi]$

Igualamos la expresión a 0 y resolvemos.

$$-4cos(2x - \tfrac{\pi}{2}) - 2\sqrt{3} = 0$$

$$-4cos(2x - \tfrac{\pi}{2}) = 2\sqrt{3}$$

$$cos(2x - \tfrac{\pi}{2}) = \frac{2\sqrt{3}}{-4}$$

$$cos(2x - \tfrac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ahora sabemos que:

$$cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para que esto pase, el angulo debe ser $\alpha = 150$ y $\alpha = 210$ ángulos y $\alpha = \frac{5}{6}\pi$ y $\alpha = \frac{7}{6}\pi$ en radianes.
Ahora, igualamos al primer valor

$$2x - \tfrac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$2x = \frac{5}{6}\pi + \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{2}$$

Ahora le damos valores enteros a k cuidando que no nos vayamos del intervalo $[-2\pi; 3\pi]$.

$$Si k = -2 \quad = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2(-2)\pi}{2} \quad = -\frac{4}{3}\pi$$

$$Si k = -1 \quad = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2(-1)\pi}{2} \quad = -\frac{1}{3}\pi$$

$$Si k = 0 \quad = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2(0)\pi}{2} \quad = \frac{2}{3}\pi$$

$$Si k = 1 \quad = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2(1)\pi}{2} \quad = \frac{5}{3}\pi$$

$$Si k = 2 \quad = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2(2)\pi}{2} \quad = \frac{8}{3}\pi$$

Podemos ver que los valores que están en el intervalo son $\left\{-\frac{4}{3}\pi; -\frac{1}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi; \frac{8}{3}\pi\right\}$. Ahora, igualamos al segundo valor

$$2x - \tfrac{\pi}{2} = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

$$2x = \frac{7}{6}\pi + \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\frac{5}{3}\pi + 2k\pi}{2}$$

Ahora le damos valores enteros a k cuidando que no nos vayamos del intervalo $[-2\pi; 3\pi]$.

$$Si k = -2 \quad = \frac{\frac{5}{3}\pi + 2(-2)\pi}{2} \quad = -\frac{7}{6}\pi$$

$$Si k = -1 \quad = \frac{\frac{5}{3}\pi + 2(-1)\pi}{2} \quad = -\frac{1}{6}\pi$$

$$Si k = 0 \quad = \frac{\frac{5}{3}\pi + 2(0)\pi}{2} \quad = \frac{5}{6}\pi$$

$$Si k = 1 \quad = \frac{\frac{5}{3}\pi + 2(1)\pi}{2} \quad = \frac{11}{6}\pi$$

$$Si k = 2 \quad = \frac{\frac{5}{3}\pi + 2(2)\pi}{2} \quad = \frac{17}{6}\pi$$

Podemos ver que los valores que están en el intervalo son $\left\{-\frac{7}{6}\pi; -\frac{1}{6}\pi; \frac{5}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi\right\}$.

La solución final es:

$$x \in \left\{-\frac{4}{3}\pi; -\frac{1}{3}\pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi; \frac{8}{3}\pi; -\frac{7}{6}\pi; -\frac{1}{6}\pi; \frac{5}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi\right\}$$

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 11)** **MODELO**

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Sea A el punto en que la función lineal que tiene ordenada al origen 6 y pendiente 3 corta al eje de abscisas, y B el punto $(-5; -7)$. Hallar la distancia entre ellos.

   $\surd$ $d = \sqrt{58}$ ☐ $d = \sqrt{50}$ ☐ $d = \sqrt{8}$ ☐ $d = \sqrt{60}$

2. Hallar la forma polinomica de la función polinomica de grado 5 que tiene un cero doble en el mismo lugar donde $f(x) = 2x - 4$ tiene su cero; ademas, comparte los ceros de la función cuadrática que tiene vértice $(2; 1)$ y ordenada al origen en -3; también pasa por el origen de coordenadas y por $(-1; -360)$.

   ☐ $y = x^5 - 40x^4 + 115x^3 - 140x^2 + 60x$ ☐ $y = 5x^5 - 4x^4 + 115x^3 - 140x^2 + 60x$

   $\surd$ $y = 5x^5 - 40x^4 + 115x^3 - 140x^2 + 60x$ ☐ $y = 5x^5 - 40x^4 + 115x^3 - 140x^2 + 6x$

3. Calcular $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 81x - 108}{3x^6 - 24x^5 + 18x^4 + 324x^3 - 1053x^2 + 972x}$

   $\surd$ ∞ ☐ 3 ☐ $\dfrac{0}{0}$ ☐ 0

4. De $f(x) = Ae^{-5x} + B$; se sabe que tiene AH en $y = 5$ y que $f(0) = 10$. Hallar $f^{-1}(x)$

   ☐ $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{5} ln\,(x - 5)$ ☐ $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{5} ln \left(\dfrac{x+5}{5}\right)$

   ☐ $f^{-1}(x) = 5ln \left(\dfrac{x-5}{5}\right)$ $\surd$ $f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{5} ln \left(\dfrac{x-5}{5}\right)$

1. Sea A el punto en que la función lineal que tiene ordenada al origen 6 y pendiente 3 corta al eje de abscisas, y B el punto $(-5;-7)$. Hallar la distancia entre ellos.

   Se nos dice la pendiente y la ordenada de la función lineal, por lo que simplemente escribimos su formula.

$$y = 3x + 6$$

   Ahora buscamos su intersección con el eje de abscisas.

$$0 = 3x + 6$$

$$-6 = 3x$$

$$-2 = x$$

   Sabemos entonces que corta al eje en $(-2;0)$, ahora usamos la formula de distancia para terminar el ejercicio.

$$d = \sqrt{((-2)-(-5))^2 + ((0)-(-7))^2}$$

$$d = \sqrt{(3)^2 + (7)^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 49}$$

$$d = \sqrt{58}$$

2. Hallar la forma polinomica de la función polinomica de grado 5 que tiene un cero doble en el mismo lugar donde $f(x) = 2x - 4$ tiene su cero; ademas, comparte los ceros de la función cuadrática que tiene vértice $(2;1)$ y ordenada al origen en -3; también pasa por el origen de coordenadas y por $(-1;-360)$.

   De la función se sabe que es polinomica de grado 5 y por consiguiente, puede tener hasta 5 ceros reales.
   Nos dice que tiene un cero doble en el mismo lugar donde $f(x) = 2x - 4$ tiene su cero, por lo que calculamos el mismo:

$$0 = 2x - 4$$

$$4 = 2x$$

$$2 = x$$

   Entonces sabemos que nuestra nueva función va a tener un cero doble en $x = 2$.

   Por otro lado, comparte los ceros de la función cuadrática que tiene vértice $(2;1)$ y ordenada al origen en -3, sabiendo eso, podemos usar la forma canonica aprovechando el vértice y la ordenada la vamos a usar para hallar el valor de a, dado que es un punto de forma $(0;-3)$

$$y = a(x-2)^2 + 1$$

   Aplicamos el punto.

$$-3 = a(0-2)^2 + 1$$

$$-4 = a(-2)^2$$

$$-4 = a(4)$$

$$-1 = a$$

La función entonces es:

$$y = -1(x-2)^2 + 1 \text{ o } y = -(x-2)^2 + 1$$

Ahora igualamos la misma a 0 para hallar sus ceros.

$$0 = -(x-2)^2 + 1$$

$$-1 = -(x-2)^2$$

$$1 = (x-2)^2$$

$$\sqrt{1} = |x-2|$$

$$1 = |x-2|$$

Aplicamos el modulo y resolvemos.

$$\begin{cases} +(x-2) = 1 \rightarrow x-2 = 1 \rightarrow x = 3 \\ -(x-2) = 1 \rightarrow x-2 = -1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Ya tenemos los ceros de la función, que son $x = 3$ y $x = 1$, lo cuales son ceros de la función cuadrática y de la función de grado cinco que buscamos.
A esto le sumamos el cero doble que obtuvimos antes ($x = 2$) y ademas sabemos que también pasa por el origen de coordenadas , lo cual es el punto $(0; 0)$, siendo este un cero mas de la función y pasa por $(-1; -360)$ que nos sirve para hallar el valor de a.

Armamos la factorizada.

$$y = a(x-2)(x-2)(x-3)(x-1)(x-0)$$

Aplicamos el $(-1; -360)$.

$$-360 = a(-1-2)(-1-2)(-1-3)(-1-1)(-1-0)$$

$$-360 = a(-3)(-3)(-4)(-2)(-1)$$

$$-360 = a(-72)$$

$$5 = a$$

Entonces la formula es:

$$y = 5(x-2)(x-2)(x-3)(x-1)(x-0)$$

Para obtener la forma polinomica distribuimos todo hasta no tener mas multiplicaciones.

$$y = 5(x-2)(x-2)(x-3)(x-1)(x-0)$$

$$y = 5(x-2)(x-2)(x-3)(x-1)x$$

$$y = 5(x^2-2x-2x+4)(x-3)(x-1)x$$

$$y = 5(x^2-4x+4)(x-3)(x-1)x$$

$$y = 5(x^3-3x^2-4x^2+12x+4x-12)(x-1)x$$

$$y = 5(x^3-7x^2+16x-12)(x-1)x$$

$$y = 5(x^4-x^3-7x^3+7x^2+16x^2-16x-12x+12)x$$

$$y = 5(x^4-8x^3+23x^2-28x+12)x$$

$$y = 5(x^5-8x^4+23x^3-28x^2+12x)$$

$$y = 5x^5-40x^4+115x^3-140x^2+60x$$

3. Calcular $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4-5x^3-9x^2+81x-108}{3x^6-24x^5+18x^4+324x^3-1053x^2+972x}$

Si aplicamos el limite vamos que nos queda una indeterminación.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^4-5x^3-9x^2+81x-108}{3x^6-24x^5+18x^4+324x^3-1053x^2+972x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Para salvarla vamos a aplicar la regla de Ruffini en ambas expresiones con divisor 3.
Aplicamos en el numerador:

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 1 & -5 & -9 & 81 & -108 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Con la tabla armada, el primer coeficiente baja directamente.

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 1 & -5 & -9 & 81 & -108 \\ & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Ahora, ese coeficiente que bajo, se multiplica por el divisor y se coloca en la segunda columna.

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 1 & -5 & -9 & 81 & -108 \\ & & 3 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Y sumamos la columna

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & -5 & -9 & 81 & -108 \\ & & 3 & & & \\ \cline{2-6} & 1 & -2 & & & \end{array}$$

Ahora repetimos para llegar al final.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & -5 & -9 & 81 & -108 \\ & & 3 & -6 & -45 & 108 \\ \cline{2-6} & 1 & -2 & -15 & 36 & 0 \end{array}$$

Entonces podemos escribir al numerador como

$$f(x) = (x-3)(x^3 - 2x^2 - 15x + 36)$$

Ahora hacemos lo mismo con el denominador.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 3 & 3 & -24 & 18 & 324 & -1053 & 972 & 0 \\ & & & & & & & \\ \cline{2-8} \end{array}$$

Con la tabla armada, el primer coeficiente baja directamente.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 3 & 3 & -24 & 18 & 324 & -1053 & 972 & 0 \\ & & & & & & & \\ \cline{2-8} & 3 & & & & & & \end{array}$$

Ahora, ese coeficiente que bajo, se multiplica por el divisor y se coloca en la segunda columna.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 3 & 3 & -24 & 18 & 324 & -1053 & 972 & 0 \\ & & 9 & & & & & \\ \cline{2-8} & 3 & & & & & & \end{array}$$

Y sumamos la columna

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 3 & 3 & -24 & 18 & 324 & -1053 & 972 & 0 \\ & & 9 & & & & & \\ \cline{2-8} & 3 & -15 & & & & & \end{array}$$

Ahora repetimos para llegar al final.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 3 & 3 & -24 & 18 & 324 & -1053 & 972 & 0 \\ & & 9 & -45 & -81 & 729 & -972 & 0 \\ \cline{2-8} & 3 & -15 & -27 & 243 & -324 & 0 & 0 \end{array}$$

Entonces podemos escribir al numerador como

$$f(x) = (x-3)(3x^5 - 15x^4 - 27x^3 + 243x^2 - 324x)$$

Ahora sustituimos estos en la expresión inicial:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 81x - 108}{3x^6 - 24x^5 + 18x^4 + 324x^3 - 1053x^2 + 972x}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^3-2x^2-15x+36)}{(x-3)(3x^5-15x^4-27x^3+243x^2-324x)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-15x+36}{3x^5-15x^4-27x^3+243x^2-324x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Aplicamos Ruffini nuevamente en ambos con $x=3$ como divisor.
Aplicamos en el numerador:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -15 & 36 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Con la tabla armada, el primer coeficiente baja directamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -15 & 36 \\ & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Ahora, ese coeficiente que bajo, se multiplica por el divisor y se coloca en la segunda columna.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -15 & 36 \\ & & 3 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Y sumamos la columna

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -15 & 36 \\ & & 3 & & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

Ahora repetimos para llegar al final.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -15 & 36 \\ & & 3 & 3 & -36 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

Entonces podemos escribir al numerador como

$$f(x) = (x-3)(x^2+x-12)$$

Ahora hacemos lo mismo con el denominador.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 3 & -15 & -27 & 243 & -324 & 0 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Con la tabla armada, el primer coeficiente baja directamente.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 3 & -15 & -27 & 243 & -324 & 0 \\ & & & & & & \\ \hline & 3 & & & & & \end{array}$$

Ahora, ese coeficiente que bajo, se multiplica por el divisor y se coloca en la segunda columna.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 3 & -15 & -27 & 243 & -324 & 0 \\ & & 9 & & & & \\ \hline & 3 & & & & & \end{array}$$

Y sumamos la columna

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 3 & -15 & -27 & 243 & -324 & 0 \\ & & 9 & & & & \\ \hline & 3 & -6 & & & & \end{array}$$

Ahora repetimos para llegar al final.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 3 & -15 & -27 & 243 & -324 & 0 \\ & & 9 & -18 & -135 & 324 & 0 \\ \hline & 3 & -6 & -45 & 108 & 0 & 0 \end{array}$$

Entonces podemos escribir al numerador como

$$f(x) = (x-3)(3x^4 - 6x^3 - 45x^2 + 108x)$$

Ahora sustituimos estos en la expresión inicial:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 15x + 36}{3x^5 - 15x^4 - 27x^3 + 243x^2 - 324x}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2 + x - 12)}{(x-3)(3x^4 - 6x^3 - 45x^2 + 108x)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x - 12}{3x^4 - 6x^3 - 45x^2 + 108x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Aplicamos Ruffini nuevamente en ambos con $x = 3$ como divisor.
Aplicamos en el numerador:

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 1 & 1 & -12 \\ & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

Con la tabla armada, el primer coeficiente baja directamente.

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 1 & 1 & -12 \\ & & & \\ \hline & 1 & & \end{array}$$

Ahora, ese coeficiente que bajo, se multiplica por el divisor y se coloca en la segunda columna.

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 1 & 1 & -12 \\ & & 3 & \\ \hline & 1 & & \end{array}$$

Y sumamos la columna

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 1 & 1 & -12 \\ & & 3 & \\ \hline & 1 & 4 & \end{array}$$

Ahora repetimos para llegar al final.

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 1 & 1 & -12 \\ & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Entonces podemos escribir al numerador como

$$f(x) = (x-3)(x+4)$$

Ahora hacemos lo mismo con el denominador.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 3 & -6 & -45 & 108 & 0 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Con la tabla armada, el primer coeficiente baja directamente.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 3 & -6 & -45 & 108 & 0 \\ & & & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

Ahora, ese coeficiente que bajo, se multiplica por el divisor y se coloca en la segunda columna.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 3 & -6 & -45 & 108 & 0 \\ & & 9 & & & \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

Y sumamos la columna

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 3 & -6 & -45 & 108 & 0 \\ & & 9 & & & \\ \hline & 3 & 3 & & & \end{array}$$

Ahora repetimos para llegar al final.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 3 & -6 & -45 & 108 & 0 \\ & & 9 & 9 & -108 & 0 \\ \hline & 3 & 3 & -36 & 0 & 0 \end{array}$$

Entonces podemos escribir al numerador como

$$f(x) = (x-3)(3x^3 + 3x^2 - 36x)$$

Ahora sustituimos estos en la expresión inicial:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x - 12}{3x^4 - 6x^3 - 45x^2 + 108x}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(3x^3 + 3x^2 - 36x)}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+4}{3x^3 + 3x^2 - 36x} = \frac{\to 7}{\to 0} = \to \infty$$

4. De $f(x) = Ae^{-5x} + B$; se sabe que tiene AH en $y = 5$ y que $f(0) = 10$. Hallar $f^{-1}(x)$

   Sabiendo que la función tiene AH podemos plantear el limite y así averiguar B (B vale 5 y se puede saber ya que según la teoría, el valor que suma a la función desplaza la asintota consigo, o sea, si fuera $f(x) = e^x + 1$ la asintota estaría en $y = 1$ y así).

$$\lim_{x \to +\infty} Ae^{-5x} + B = 5$$

$$Ae^{-5(\to +\infty)} + B = 5$$

$$Ae^{\to -\infty} + B = 5$$

$$\frac{1}{Ae^{\to +\infty}} + B = 5$$

$$\frac{1}{\to +\infty} + B = 5$$

$$\to 0 + B = 5$$

$$B = 5$$

Entonces la función nos queda:

$$f(x) = Ae^{-5x} + 5$$

Ahora usamos el punto para hallar A.

$$10 = Ae^{-5(0)} + 5$$

$$5 = Ae^{-5(0)}$$

$$5 = Ae^{0}$$

$$5 = A$$

Ahora nos queda:

$$f(x) = 5e^{-5x} + 5$$

Calculamos su inversa:

$$y = 5e^{-5x} + 5$$

$$y - 5 = 5e^{-5x}$$

$$\frac{y-5}{5} = e^{-5x}$$

$$ln\left(\frac{y-5}{5}\right) = -5x$$

$$\frac{ln\left(\frac{y-5}{5}\right)}{-5} = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{ln\left(\frac{x-5}{5}\right)}{-5}$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{5}ln\left(\frac{x-5}{5}\right)$$

Matemática (51) **Primer Parcial (Modelo 12)** **MODELO**

Apellido y Nombres: ______________________________

DNI: ______________________________

Fecha y Comision: ______________________________

En cada ejercicio, escriba los razonamientos que justifican la respuesta. Marcar con una cruz en la respuesta correcta en cada caso.

1. Escribir al conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / \dfrac{f(x)}{g(x)} > 0\}$ como intervalo o unión de intervalos, sabiendo que $f(x)$ es una función cuadrática con vértice en $(2;4)$ y pasa por $(0;0)$; por otro lado, $g(x)$ es la función polinomica de grado 3 que cumple $f(2) = f(5) = f(7) = 0$ y $f(-1) = -720$

   ☐ $(0;2) \cup (2;5) \cup (7;+\infty)$ ☐ $(0;2) \cup (4;5) \cup (5;+\infty)$ ☐ $(0;2) \cup (7;+\infty)$ $\surd$ $(-\infty;0) \cup (2;4) \cup (5;7)$

2. Dada $f(x) = -640x + 184x^3 + 2x^6 - 6x^5 + 192x^2 - 56x^4$, hallar su C^+ sabiendo que tiene un cero doble en el valor donde $g(x) = \dfrac{2x}{6x-24}$ tiene su AV y un cero simple en el negativo del común divisor entre $10; 35; 65$ (excluyendo al 1).

   ☐ $C^+ : (-\infty;-5) \cup (-2;0) \cup (2;4)$ ☐ $C^+ : (-\infty;-5) \cup (-2;0) \cup (0;4) \cup (4;+\infty)$

   $\surd$ $C^+ : (-\infty;-5) \cup (-2;0) \cup (2;4) \cup (4;+\infty)$ ☐ $C^+ : (-\infty;-5) \cup (-5;0) \cup (2;4) \cup (4;+\infty)$

3. De $f(x) = \dfrac{g(x)+8}{-4x^2 - Ax + 24}$ se sabe que una de sus AV es $x = 3$ y que $g(x)$ es una función lineal que pasa por $(3;2)$ y $(-3;-10)$. Dar su otra AV si tiene.

   $\surd$ **No tiene otra AV.** ☐ $x = 2$ ☐ $y = 2$ ☐ $x = -3$

4. De $f(x) = Acos(\alpha) + 4$ se sabe que su imagen es el intervalo $[-4;12]$, ademas, de α se sabe que su forma es $x - B$ y de B se sabe que se obtiene al resolver $f(x) = x + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{4}$ para $x = \pi$. Se pide calcular sus ceros para $x \in [-\pi; 2\pi]$

   ☐ $C^0 : \left\{-\dfrac{7}{12}\pi; \dfrac{1}{12}\pi; \dfrac{20}{12}\pi\right\}$ ☐ $C^0 : \left\{-\dfrac{7}{12}\pi; \dfrac{7}{12}\pi; \dfrac{17}{12}\pi\right\}$

   ☐ $C^0 : \left\{-\dfrac{1}{12}\pi; \dfrac{1}{12}\pi; \dfrac{24}{12}\pi\right\}$ $\surd$ $C^0 : \left\{-\dfrac{1}{12}\pi; \dfrac{7}{12}\pi; \dfrac{23}{12}\pi\right\}$

1. Escribir al conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / \dfrac{f(x)}{g(x)} > 0\}$ como intervalo o unión de intervalos, sabiendo que $f(x)$ es una función cuadrática con vértice en $(2;4)$ y pasa por $(0;0)$; por otro lado, $g(x)$ es la función polinomica de grado 3 que cumple $g(2) = g(5) = g(7) = 0$ y $g(-1) = -720$

Para este ejercicio vamos primero a tener que formar las funciones $f(x)$ y $g(x)$ antes de poder plantear la inecuacion principal.
Pasamos a armar $f(x)$. De la misma conocemos el vértice, así que podemos armar la forma canónica.

$$f(x) = a(x-2)^2 + 4$$

Ahora usamos el punto $(0;0)$ para hallar el valor del coeficiente cuadrático.

$$0 = a(0-2)^2 + 4$$

$$0 = a(-2)^2 + 4$$

$$0 = a(4) + 4$$

$$-4 = a(4)$$

$$-1 = a$$

Entonces ya conocemos $f(x)$.

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4$$

Vamos ahora a construir a $g(x)$ partiendo de los datos, por un lado, sabemos que es de grado 3, y por otro se nos dice que $g(2) = g(5) = g(7) = 0$, lo que significa que 2, 5 y 7 son ceros de la función, así que podemos escribir.

$$g(x) = a(x-2)(x-5)(x-7)$$

Para hallar el valor del coeficiente principal usamos el punto $g(-1) = -720$.

$$-720 = a(-1-2)(-1-5)(-1-7)$$

$$-720 = a(-3)(-6)(-8)$$

$$-720 = a(-144)$$

$$5 = a$$

Ahora damos $g(x)$.

$$g(x) = 5(x-2)(x-5)(x-7)$$

Teniendo esto, armamos la inecuacion.

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

$$\frac{-(x-2)^2+4}{5(x-2)(x-5)(x-7)} > 0$$

Antes de seguir con el ejercicio tenemos que calcular la positividad y negatividad de la función $g(x)$. De la misma sabemos que tienen ceros en 3 valores, y sabemos que las funciones polinomicas son continuas, podemos ver evaluando si es positiva o negativa entre los ceros.
Nos quedarían definidos los intervalos $(-\infty;2)$, $(2;5)$, $(5;7)$ y $(7;+\infty)$

$$\begin{array}{lll} g(0) & = 5(0-2)(0-5)(0-7) & = -350 \\ g(3) & = 5(3-2)(3-5)(3-7) & = 40 \\ g(6) & = 5(6-2)(6-5)(6-7) & = -36 \\ g(8) & = 5(8-2)(8-5)(8-7) & = 90 \end{array}$$

Sabemos entonces que $C^+ : (2;5) \cup (7;+\infty)$ y $C^- : (-\infty;2) \cup (5;7)$
Planteamos los casos. Primer caso:

$$\mathbf{A > 0 \wedge B > 0}: \quad \begin{array}{ccc} -(x-2)^2+4>0 & \wedge & 5(x-2)(x-5)(x-7)>0 \\ -(x-2)^2>-4 & \wedge & 5(x-2)(x-5)(x-7)>0 \\ (x-2)^2<4 & \wedge & 5(x-2)(x-5)(x-7)>0 \\ |x-2|<2 & \wedge & 5(x-2)(x-5)(x-7)>0 \end{array}$$

El módulo, si lo resolvemos nos que da

$$\begin{cases} +(x-2)<2 \to x-2<2 \to x<4 \\ -(x-2)<2 \to x-2>-2 \to x>0 \end{cases}$$

Para que $5(x-2)(x-5)(x-7) > 0$ tenemos que tomar el conjunto de positividad en consideración, el que es $C^+ : (2;5) \cup (7;+\infty)$
Solución primer caso $(2;4)$

Segundo caso:

$$\mathbf{A < 0 \wedge B < 0}: \quad \begin{array}{ccc} -(x-2)^2+4<0 & \wedge & 5(x-2)(x-5)(x-7)<0 \\ -(x-2)^2<-4 & \wedge & 5(x-2)(x-5)(x-7)<0 \\ (x-2)^2>4 & \wedge & 5(x-2)(x-5)(x-7)<0 \\ |x-2|>2 & \wedge & 5(x-2)(x-5)(x-7)<0 \end{array}$$

El módulo, si lo resolvemos nos que da

$$\begin{cases} +(x-2)>2 \to x-2>2 \to x>4 \\ -(x-2)>2 \to x-2<-2 \to x<0 \end{cases}$$

Para que $5(x-2)(x-5)(x-7)<0$ tenemos que tomar el conjunte de negatividad en consideración, el que es $C^{-}:(-\infty;2)\cup(5;7)$
Solución segundo caso $(-\infty;0)\cup(5;7)$

$$\text{Solución total: } (-\infty;0)\cup(2;4)\cup(5;7)$$

2. Dada $f(x) = -640x + 184x^3 + 2x^6 - 6x^5 + 192x^2 - 56x^4$, hallar su C^+ sabiendo que tiene un cero doble en el valor donde $g(x) = \dfrac{2x}{6x-24}$ tiene su AV y un cero simple en el negativo del común divisor entre $10; 35; 65$ (excluyendo al 1).

   Lo primero que podemos hacer es ordenar el polinomio que es $f(x)$.

$$f(x) = -640x + 184x^3 + 2x^6 - 6x^5 + 192x^2 - 56x^4$$

$$f(x) = 2x^6 - 6x^5 - 56x^4 + 184x^3 + 192x^2 - 640x$$

   También podemos extraer x como factor común e incluso 2 también, pero en este caso no lo haremos ahora, solo extraemos la variable.

$$f(x) = x\left(2x^5 - 6x^4 - 56x^3 + 184x^2 + 192x - 640\right)$$

   Ahora, se nos dice que hay que buscar la positividad, para eso vamos a buscar sus ceros, para ello, se nos dice que tiene un cero doble en donde la siguiente función tiene su asintota vertical:

$$g(x) = \frac{2x}{6x-24}$$

   Para hallar la asintota vertical de una función, hay que buscar en los valores excluidos del dominio, para ello, al ser una división, vamos a tomar el denominador y plantear que debe ser distinto de cero.

$$6x - 24 \neq 0$$

$$6x \neq 24$$

$$x \neq 4$$

   Sabemos entonces que el dominio de la función es:

$$\forall\mathbb{R} - \{4\}$$

   Ahora, verificamos que sea asintota aplicando el limite a dicho valor.

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x}{6x-24} = \frac{\to 8}{\to 0} = \to \infty$$

   Como nos tiende a infinito, sabemos que en efecto la función tiene asintota vertical en $x = 4$ y este valor es el cero doble de la función, por lo que podemos hacer Ruffini dos veces con el valor.

$$\begin{array}{c|cccccc} 4 & 2 & -6 & -56 & 184 & 192 & -640 \\ & & 8 & 8 & -192 & -32 & 640 \\ \hline & 2 & 2 & -48 & -8 & 160 & 0 \end{array}$$

   Si escribimos el polinomio, nos queda:

$$f(x) = x\,(x-4)\left(2x^4 + 2x^3 - 48x^2 - 8x + 160\right)$$

Volvemos a aplicar Ruffini en el polinomio.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 2 & 2 & -48 & -8 & 160 \\ & & 8 & 40 & -32 & -160 \\ \hline & 2 & 10 & -8 & -40 & 0 \end{array}$$

Si escribimos el polinomio, nos queda:

$$f(x) = x\,(x-4)\,(x-4)\left(2x^3 + 10x^2 - 8x - 40\right)$$

Podemos juntar los términos que son iguales:

$$f(x) = x\,(x-4)^2\left(2x^3 + 10x^2 - 8x - 40\right)$$

Ahora, hay que buscar el negativo del común divisor entre $10; 35; 65$, el numero que satisface esa condición es el 5, ya que si descomponemos en divisores, vemos que es el común (exceptuando al 1)

$$10 = (2)(5)$$

$$35 = (6)(5)$$

$$65 = (13)(5)$$

Por lo cual, nuestro valor buscado es el $x = -5$, a este lo usamos para Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} -5 & 2 & 10 & -8 & -40 \\ & & -1 & 0 & 40 \\ \hline & 2 & 0 & -8 & 0 \end{array}$$

Si escribimos el polinomio, nos queda:

$$f(x) = x\,(x-4)^2\,(x+5)\left(2x^2 + 0x - 8\right)$$

De esto, vemos que se puede extraer el 2 como factor común:

$$f(x) = x\,(x-4)^2\,(x+5)\,2\left(x^2 - 4\right)$$

Y que ese ultimo termino es una diferencia de cuadrados, a la cual la podemos factorizar como:

$$f(x) = 2x\,(x-4)^2\,(x+5)\,(x-2)\,(x+2)$$

Con esto, tenemos al polinomio en su mínima expresión y podemos dar su conjunto de ceros.

$$C^0 : \{-5; -2; 0; 2; 4\}$$

Esto nos deja al dominio de la función ($\forall\mathbb{R}$ al ser un polinomio) dividido en:

$$(-\infty; -5) \cup (-5; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$$

Lo que vamos a hacer es tomar un valor de cada intervalo y evaluar en la función para saber que resultado nos arroja. Si este es positivo, por el teorema de Bolzano, sabemos que es un intervalo de positividad, en caso contrario, si es negativo, es de negatividad.

$$\begin{aligned} f(-6) &= 38400 \\ f(-3) &= -2940 \\ f(-1) &= 600 \\ f(1) &= -324 \\ f(3) &= 240 \\ f(5) &= 2100 \end{aligned}$$

De esto concluimos que el conjunto de positividad es $(-\infty; -5) \cup (-2; 0) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$

3. De $f(x) = \dfrac{g(x)+8}{-4x^2 - Ax + 24}$ se sabe que una de sus AV es $x = 3$ y que $g(x)$ es una función lineal que pasa por $(3; 2)$ y $(-3; -10)$. Dar su otra AV si tiene.

Tenemos que hallar el valor de $g(x)$ y el valor de A para comenzar.
Para hallar $g(x)$ sabemos que es una función lineal y que pasa por $(3; 2)$ y $(-3; -10)$, con esto buscamos la pendiente de la recta.

$$m = \frac{-10-2}{-3-3} = \frac{-12}{-6} = 2$$

La función por lo tanto se puede plantear como:

$$y = 2x + b$$

Para hallar b tomamos uno de los do puntos y los reemplazamos en la funcion, en este caso $(3; 2)$.

$$2 = 2(3) + b$$

$$2 = 6 + b$$

$$-4 = b$$

La función entonces es:

$$g(x) = 2x - 4$$

Así podemos escribir que:

$$f(x) = \frac{(2x-4)+8}{-4x^2 - Ax + 24}$$

$$f(x) = \frac{2x+4}{-4x^2 - Ax + 24}$$

Ahora, para hallar A se nos dice que una asintota vertical se halla en $x = 3$, esto nos indica que dicho valor si lo reemplazamos en el denominador, este da como resultado 0, por lo cual, esto nos sirve hallar A por despeje.

$$-4(3)^2 - A(3) + 24 = 0$$

$$-4(9) - 3A = -24$$

$$-36 - 3A = -24$$

$$-3A = 12$$

$$A = -4$$

Entonces, ya tenemos la función:

$$f(x) = \frac{2x+4}{-4x^2+4x+24}$$

Ahora, se nos pide averiguar si tiene otra asintota, para ello, buscamos primero los valores excluidos del dominio, para eso, tomamos el denominador y planteamos que debe ser distinto de cero.

$$-4x^2+4x+24 \neq 0$$

Aplicamos la formula resolvente ya que es una cuadrática igualada a cero.

$$\{x_1; x_2\} = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(-4)(24)}}{2(-4)}$$

Esto da como resultado que $x = -2$ y $x = 3$ son las raíces, por lo cual, el dominio es:

$$\forall \mathbb{R} - \{-2; 3\}$$

Sabemos que $x = 3$ es asintota por el enunciado, por lo cual, nos queda ver que pasa en $x = -2$, para ello planteamos el limite.

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{-4x^2+4x+24} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

Como queda indeterminado, debemos salvar la indeterminación, NO PODEMOS DEFINIR NADA AUN.
Para salvar, factorizamos numerador y denominador.

$$\lim_{x \to -2} \frac{2(x+2)}{-4(x+2)(x-3)}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2}{-4(x-3)}$$

Aplicamos ahora el limite.

$$\lim_{x \to -2} \frac{2}{-4(x-3)} = \frac{\to 2}{\to 20}$$

Como nos queda un numero, sabemos que se trata de un bache y por lo tanto, no hay asintota en $x = -2$ y por lo cual, no quedan otros candidatos a asintota vertical, lo que deja a $x = 3$ como única asintota vertical.

4. De $f(x) = Acos(\alpha) + 4$ se sabe que su imagen es el intervalo $[-4; 12]$, ademas, de α se sabe que su forma es $x - B$ y de B se sabe que se obtiene al resolver $f(x) = x + \frac{x}{2} - \frac{x}{4}$ para $x = \pi$. Se pide calcular sus ceros para $x \in [-\pi; 2\pi]$

Podemos comenzar por hallar el valor de A o el de α, necesitamos ambos para poder buscar los ceros de la función. Comenzamos hallando A, para eso lo primero que vamos a hacer es calcular la imagen de la función trigonométrica para poder igualarla con la que nos dice el enunciado.

Para toda trigonométrica básica la imagen es:

$$[-1; 1]$$

Ahora bien, esta función se multiplica por el valor de A, así que multiplicamos ambos extremos por A y nos queda:

$$[-A; A]$$

Por ultimo, a la función se le suman 4 unidades, así que a la imagen le sumamos 4 en ambos extremos y nos queda:

$$[-A + 4; A + 4]$$

Esta seria nuestra imagen, pero podemos ver que hay que resolver cual es el valor de la incógnita, para eso usamos el valor de la imagen que nos dieron $[-4; 12]$, así podemos plantear que:

$$-A + 4 = -4 \text{ o } A + 4 = 12$$

Despejamos y obtenemos el valor de A. Como aclaración, no hace alta resolver ambas cuentas, pero al hacerlo nos sirve para verificar, ya que el valor de A es único, ambos tienen que dar el mismo resultado, de otra forma, esta mal hallado el valor.

$$-A = -4 - 4 \text{ o } A = 12 - 4$$

$$-A = -8 \text{ o } A = 8$$

$$A = 8 \text{ o } A = 8$$

Con esto, podemos reescribir $f(x)$ como:

$$f(x) = 8cos(\alpha) + 4$$

Ahora, para α se nos dice que hay que tener en cuenta que es de la forma $x - B$, lo cual quiere decir que hay que calcular B, este se obtiene al resolver $f(x) = x + \frac{x}{2} - \frac{x}{4}$ para $x = \pi$, así que hacemos eso, aplicamos el valor a la función:

$$f(x) = x + \frac{x}{2} - \frac{x}{4}$$

$$f(\pi) = \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

NO RESOLVEMOS las divisiones por separado, ya que si esta presente π sabemos que en trigonométricas es mejor dejarlo así. Por lo cual, podemos extraer a π de factor común o tratarlo como si fuera una variable mas.

$$f(\pi) = \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$f(\pi) = \pi\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$f(\pi) = \pi\frac{5}{4}$$

$$f(\pi) = \frac{5}{4}\pi$$

Este es el valor de B, por lo que podemos sustituirlo y nos queda que

$$\alpha = x - B$$

$$\alpha = x - \frac{5}{4}\pi$$

Y finalmente, tenemos la función completa.

$$f(x) = 8cos\left(x - \frac{5}{4}\pi\right) + 4$$

Ahora que tenemos la función, hay que calcular sus ceros para $x \in [-\pi; 2\pi]$, para hacer esto, igualamos la función a 0 y despejamos.

$$8cos\left(x - \frac{5}{4}\pi\right) + 4 = 0$$

$$8cos\left(x - \frac{5}{4}\pi\right) = -4$$

$$cos\left(x - \frac{5}{4}\pi\right) = \frac{-4}{8}$$

$$cos\left(x - \frac{5}{4}\pi\right) = \frac{-1}{2}$$

Buscamos los valores para que el coseno nos de $\frac{-1}{2}$, los cuales son 120° y 240°, en radianes $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{4}{3}\pi$ respectivamente. Tomamos el angulo de la función y lo igualamos con nuestro primer angulo.

$$x - \frac{5}{4}\pi = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{23}{12}\pi + 2k\pi$$

Ahora le damos valores a k fijándonos que no se vaya del intervalo $x \in [-\pi; 2\pi]$.

$$k = -1 \quad = \frac{23}{12}\pi + 2(-1)\pi \quad = -\frac{1}{12}\pi$$

$$k = 0 \quad = \frac{23}{12}\pi + 2(0)\pi \quad = \frac{23}{12}\pi$$

Estos son los valores para este angulo, ahora hacemos lo mismo con el otro.

$$x - \frac{5}{4}\pi = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{4}{3}\pi + \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{31}{12}\pi + 2k\pi$$

Ahora le damos valores a k fijándonos que no se vaya del intervalo $x \in [-\pi; 2\pi]$.

$$k = 0 \quad = \frac{31}{12}\pi + 2(-1)\pi \quad = \frac{7}{12}\pi$$

Entonces, su conjunto de ceros es:

$$C^0 : \left\{-\frac{1}{12}\pi; \frac{7}{12}\pi; \frac{23}{12}\pi\right\}$$