C **ANÁLISIS (ING. Y EX.) (66)** **2do PARCIAL** **1er CUATRIMESTRE DE 2023** **Tema 2**

APELLIDO .... **NOMBRES** .. .. **DNI** .. ..

NOTA del 1er parcial: 7 (siete)

INSCRIPTO EN:

SEDE: Martinez	DÍAS:
HORARIO:	AULA:

1	2	3	4	NOTA
B	B	B	B$^-$	10 (diez)

Duración: 2:30 hs

PROMOCIONA	RECUPERA: Jueves 13-07
9 (nueve)	1ro | 2do
INSUFICIENTE	FINAL:
	- ó -

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1. Sea $P(x) = 4 + 9x + 3x^2$ el polinomio de Taylor de orden 2 de una función $f(x)$ en el punto $x_0 = 0$. Si $g(x) = f(x)(\ln(x+1) + 2)$, hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $g(x)$ en $x_0 = 0$.

2. Sea $F(x) = \int_0^x f(t)f'(t)dt$, con f una función con derivada continua. Hallar $f(x)$ si se sabe que $F'(x) = 12x^5 + 6x$ y $f(0) = 4$.

3. Hallar el área de la región encerrada por el gráfico de $f(x) = (x-4)e^{x^2-8x}$ y el eje x para $0 \leq x \leq 5$.

4. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3(x-6)^n}{1+4^n}$ es convergente.

4 - Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 (x-6)^n}{1+4^n} \text{ es convergente.}$$

Comienzo aplicando el crit. de convergencia absoluta de Cauchy que establece que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \rightarrow L<1 \rightarrow \text{la serie converge absolutamente}$$

$$L>1 \rightarrow \text{la serie diverge}$$

$$L=1 \rightarrow \text{el crit. \underline{No} sirve}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^3(x-6)^n}{1+4^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}\cdot\sqrt[n]{|(x-6)^n|}}{\sqrt[n]{1+4^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}^3 \cdot |x-6|}{\sqrt[n]{4^n\cdot\left(1+\frac{1}{4^n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}^3\cdot|x-6|}{\sqrt[n]{4^n}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{1}{4^n}}}$$

$1^3 = 1$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}^3\cdot|x-6|}{4\cdot\sqrt[n]{1+\frac{1}{4^n}}} = \frac{|x-6|}{4}$$

1

Luego, por el crit. de Cauchy utilizado, para que la serie sea convergente $L<1$, es decir:

$$\frac{|x-6|}{4} < 1$$

$$|x-6| < 4$$

esto significa que:

-4 $(x-6)$ 4

abro módulo

$$-4 < x-6 \qquad x-6 < 4$$

$$\boxed{2 < x} \qquad \boxed{x < 10}$$

La serie resulta convergente absolutamente para los $x \in (2;10)$. $\leftarrow$ $\boxed{2 < x < 10}$

A continuación averiguo si la misma converge o no en sus extremos.

Cuando $x=10$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(10-6)^n}{1+4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot 4^n}{1+4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot \cancel{4^n}}{\cancel{4^n} \cdot \left(1+\frac{1}{4^n}\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{1+\frac{1}{4^n}}$$. Luego analizo la condición necesaria de convergencia calculando el $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{1+\frac{1}{4^n}} = +\infty \neq 0 \Rightarrow$$ la serie **DIVERGE** en $x=10$ por no cumplir con la condición necesaria de convergencia ✓

Cuando $x=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(2-6)^n}{1+4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot (-4)^n}{1+4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot (-1)^n \cdot \cancel{4^n}}{\cancel{4^n} \cdot \left(1+\frac{1}{4^n}\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{1+\frac{1}{4^n}} \cdot (-1)^n$$ ✓

Serie alternada. Según el crit. de Leibniz, si

1) a_n es decreciente
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum a_n \cdot (-1)^n$ converge

Ya calculamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ y que el término general de la serie diverge. Por su parte $(-1)^n$ también diverge ya que oscila finitamente entre -1 y 1 dependiendo del valor de n.

Por lo tanto, la serie **DIVERGE** en $x=2$.

Por No cumplir con la "C.N.C" (condición necesaria de convergencia)

$$\boxed{\text{Rta: La serie es convergente para los } x \in (2;10)}$$

* no está bien justificado, no se aplica el criterio de Leibniz

la serie diverge pues no se cumple la condición necesaria, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^3}{1+1/4^n} = \infty$ oscila en forma infinito

3- Hallar el área de la región encerrada por el gráfico de $f(x) = (x-4).e^{x^2-8x}$ y el eje x para $0 \leq x \leq 5$

Busco si hay algún punto de intersección entre f(x) y el eje x

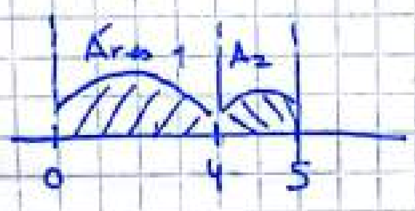
$\Rightarrow f(x) = 0$

$(x-4).e^{x^2-8x} = 0$

$x-4=0$ $\qquad e^{x^2-8x} \neq 0$

$\boxed{x=4}$

Planteo el siguiente gráfico a modo de guía:



→ A continuación evalúo f(x) en los intervalos:

(0;4)
(4;5)

Para determinar si es el "techo" o el "piso" del área que quiero calcular.

Intervalo $(0;4) \rightarrow f(1) = (-3).e^{1^2-8.1} = (-3).e^{-7} \simeq -2,73.10^{-3} < 0$

$\underset{\text{piso}}{f(x)} < \underset{\text{techo}}{0}$ $\qquad$ f(x) es el "piso" del área en (0;4)

Intervalo $(4;5) \rightarrow f(\underset{(4,5)}{\tfrac{9}{2}}) = (\frac{9}{2}-4).e^{(\frac{9}{2})^2-8.(\frac{9}{2})}$

$= \frac{1}{2}e^{\frac{81}{4}-36} = \frac{1}{2}e^{-\frac{63}{4}} \simeq +127 > 0$?

$\underset{\text{piso}}{0} < \underset{\text{techo}}{f(x)}$ $\qquad$ f(x) es el "techo" del área en (4;5)

Por lo tanto, el área que quiero calcular es.

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^4 (0 - f(x))\,dx + \int_4^5 (f(x) - 0)\,dx$$

NOTA

A continuación calculo la Primitiva de F(x) para luego aplicar la regla de Barrow en el cálculo original del Área:

(A) → Primitiva de F(x)

$$\int F(x)\,dx = \int (x-4).e^{x^2-8x}\,dx = \int e^{u}.\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}.\int e^{u}\,du$$

$u = x^2-8x$

$du = 2x-8$

$\frac{du}{2} = \frac{2x-8}{2} \Rightarrow \frac{du}{2} = x-4$

$$= \frac{1}{2}.e^{u}+C$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}.e^{x^2-8x}+C}$$

Volviendo al cálculo original del Área, tenemos que...

$$A = \int_0^4 -F(x)\,dx + \int_4^5 F(x)\,dx = -\int_0^4 F(x)\,dx + \int_4^5 F(x)\,dx$$

$$= -\left[\frac{1}{2}.e^{x^2-8x}\Big|_0^4\right] + \left(\frac{1}{2}.e^{x^2-8x}\Big|_4^5\right)$$

$$= -\left[\frac{1}{2}.e^{4^2-8.4} - \left(\frac{1}{2}.e^{0^2-8.0}\right)\right] + \left(\frac{1}{2}.e^{5^2-8.5} - \left(\frac{1}{2}.e^{4^2-8.4}\right)\right)$$

$$= -\left[\frac{1}{2}.e^{-16} - \frac{1}{2}.\underbrace{e^{0}}_{1}\right] + \left(\frac{1}{2}.e^{-15} - \frac{1}{2}.e^{-16}\right)$$

$$= -\left[\frac{1}{2}.e^{-16} - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}.e^{-15} - \frac{1}{2}.e^{-16}\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}.e^{-16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.e^{-15} - \frac{1}{2}.e^{-16}$$

Rta:

$$\boxed{A = -e^{-16} + \frac{1}{2}.e^{-15} + \frac{1}{2}}$$ //

1- Sea $P(x) = 4 + 9x + 3x^2$ el P. de T. de orden 2 de una función $f(x)$ en el punto $x_0 = 0$. Si $g(x) = f(x) \cdot (\ln(x+1) + 2)$, hallar el P. de Taylor de orden 2 de $g(x)$ en $x_0 = 0$

el P. de T. de orden 2 de $g(x)$ en $x_0 = 0$ sigue la siguiente estructura

$$Q_2(x) = g(0) + g'(0) \cdot x + \frac{g''(0)}{2!} \cdot x^2$$

estos son incognitas.

Por Prop. del Polinomio de Taylor, en $x = x_0 = 0$.

$g(0) = Q(0)$ $\qquad f(0) = P(0)$

$g'(0) = Q'(0)$ $\qquad f'(0) = P'(0)$

$g''(0) = Q''(0)$ $\qquad f''(0) = P''(0)$

utilizamos esta propiedad para averiguar los valores del Polinomio de $g(x)$ que nos faltan.

• Calculo hasta la segunda derivada de $P(x)$ y luego los evaluo en $x = 0$

$P(x) = 4 + 9x + 3x^2 \Rightarrow P(0) = 4 = f(0)$

$P'(x) = 9 + 6x \Rightarrow P'(0) = 9 = f'(0)$

$P''(x) = 6 \Rightarrow P''(0) = 6 = f''(0)$

A continuación, calculo hasta la segunda derivada de $g(x)$ y luego las evaluo en $x = 0$ junto con los datos obtenidos.

$g(x) = f(x) \cdot (\ln(x+1) + 2)$

Regla del Producto

$f' \cdot g + f \cdot g'$ ← $g'(x) = f'(x) \cdot (\ln(x+1) + 2) + f(x) \cdot \frac{1}{x+1}$

$$g''(x) = f''(x) \cdot (\ln(x+1) + 2) + f'(x) \cdot \frac{1}{x+1} + f'(x) \cdot \frac{1}{x+1} + f(x) \cdot \left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)$$

luego...

$g(0) = f(0) \cdot (\ln(1) + 2) = f(0) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8 \rightarrow \boxed{g(0) = 8}$

$g'(0) = f'(0) \cdot (\ln(1) + 2) + f(0) \cdot 1 = 18 + 4 = 22 \rightarrow \boxed{g'(0) = 22}$

$g''(0) = f''(0) \cdot (\ln(1) + 2) + f'(0) \cdot 1 + f'(0) \cdot 1 + f(0) \cdot (-1)$

$g''(0) = 12 + 9 + 9 - 4 = 26 \longrightarrow \boxed{g''(0) = 26}$

Por lo tanto, el p. de Taylor de $g(x)$ de orden 2 en x_0 es:

$$P_2(x) = 8 + 22x + \frac{26}{2}x^2$$

Rta:

$$\boxed{P_2(x) = 8 + 22x + 13x^2.}$$

APE

2- Sea $F(x) = \int_0^x f(t) . f'(t)\, dt$, con f una función ~~continua~~ con derivada continua. Hallar $f(x)$ si se sabe que $F'(x) = 12x^5 + 6x$ y $f(0) = 4$

Utilizando la regla de Leibniz

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(b).b' - f(a).a$$

La derivada de $F(x)$ es

$$\left(\int_0^x f(t) . f'(t)\, dt\right)' = f(x).1.f'(x).1 - \cancel{f(0).0.f'(0).0}$$

$$= f(x).f'(x)$$ ✓

Luego, como el enunciado establece que $F'(x) = 12x^5 + 6x$

$$\Rightarrow \quad f(x).f'(x) = 12x^5 + 6x$$ ✓

$$\underbrace{\int f(x).f'(x)\,dx}_{\text{Integral 1}} = \underbrace{\int 12x^5 + 6x\,dx}_{\text{Integral 2}}$$ ✓

CA → Integral 1

$$\int f(x).f'(x)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C$$

$u = f(x)$

$du = f'(x)\,dx$

$$= \frac{f(x)^2}{2} + C$$ ✓

CA → Integral 2

$$\int 12x^5 + 6x\,dx = \int 12x^5\,dx + \int 6x\,dx = 12\int x^5\,dx + 6\int x\,dx$$

$$= 12.\frac{x^6}{6} + 6.\frac{x^2}{2} + C$$ ✓

$$= \boxed{2x^6 + 3x^2 + C_1}$$ ✓

Volviendo al cálculo original tenemos que

despejo f(x)

$$\frac{f(x)^2}{2} + C_1 = 2x^6 + 3x^2 + C_2$$

$$\frac{f(x)^2}{2} = 2x^6 + 3x^2 + C_2 - C_1 \rightarrow \underline{\text{OBS}}: C_2 - C_1 = C$$ ✓

(ya que ambos son constantes, los agrupo en una sola llamada "C".

NOTA

$$F(x)^2 = (2x^6 + 3x^2 + c) \cdot 2$$

$$F(x)^2 = 4x^6 + 6x^2 + 2C.$$

$$|F(x)| = \sqrt{4x^6 + 6x^2 + 2C}$$ ✓

luego, como $F(0) = 4 \rightarrow$ utilizo este dato para calcular el valor de "C" que cumple lo establecido por el enunciado.

$$|F(0)| = \sqrt{4 \cdot 0^6 + 6 \cdot 0^2 + 2C} = 4$$

$$\sqrt{2C} = 4$$

$$2C = 4^2$$

$$2C = 16$$

$$C = \frac{16}{2} \Rightarrow \boxed{C = 8}$$ ✓

Por lo tanto.

$$|F(x)| = \sqrt{4x^6 + 6x^2 + 2 \cdot 8} \Rightarrow |F(x)| = \sqrt{4x^6 + 6x^2 + 16}$$

Verifico que $F(0) = 4$

~~F(0) = √4x~~

$$F(0) = \sqrt{4 \cdot 0^6 + 6 \cdot 0^2 + 16} = \sqrt{16} = 4$$ ✓

Por lo tanto.

Rta:

$$\boxed{F(x) = \sqrt{4x^6 + 6x^2 + 16}}$$ ✓