F ANÁLISIS (ING. Y EX.) (66) 2^{do} PARCIAL 2^{do} CUATRIMESTRE DE 2022 **Tema 1**

APELLIDO [redacted]..... NOMBRES [redacted]. DNI [redacted]..

NOTA del 1^{er} parcial: [redacted]

INSCRIPTO EN:

SEDE:	DÍAS:
HORARIO:	AULA:

PROMOCIONA	RECUPERA: Jueves 24-11 1^{ro} | 2^{do}
8	
INSUFICIENTE	FINAL: - 6 -

1	2	3	4	NOTA
B	B	B	B	10 (diez)

Duración: 2:30 hs

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1.- Sea $g(x) = 1 - 3x + \ln(f(x))$. Si el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de f es $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 - 4x^3$, hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g en $x_0 = 0$.

2.- Hallar f tal que $f'(x) = (3 + f(x))7x^5$ con $f(1) = -2$.

3.- Hallar el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = 5x + 3xe^{2x^2+1}$ y la recta de ecuación $y = 5x$ para $-1 \le x \le 1$.

4.- Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^n + 4}{3^n + 2^n}\right) x^n$ es convergente.

$7 + C$

$) = -2$

III

Junto ambos y uso el dato

$\ln|f(x)+3| \ln = 7\frac{x^6}{6} + C$

$e^{\ln(f(x)+3)} = e^{7\frac{x^6}{6}+C}$

$f(x)+3 = e^{7\frac{x^6}{6}+C}$

$f(x) = e^{7\frac{x^6}{6}+C} - 3$

sigue atrás

Tomás Nuñez

Hoja 1

2 $f'(x) = (3 + f(x))\, 7x^5$ $\boxed{\text{DATO } f(1) = -2}$ Hoja 1

$$\frac{f'(x)}{3 + f(x)} = 7x^5$$

$$\underbrace{\int \frac{f'(x)}{3+f(x)}\, dx}_{A} = \underbrace{\int 7x^5\, dx}_{B}$$

I) Busco Primitiva de (A)

$$\int \frac{f'(x)}{3+f(x)}\, dx \qquad u: f(x)+3 \qquad du: f'(x)\, dx$$

$$\int \frac{1}{u}\, du$$

$$\Rightarrow \ln(|u|) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(|f(x)+3|) + C} \quad (A)$$

Busco Primitiva (B) (II)

$$\int 7x^5\, dx$$

$$7\int x^5\, dx$$

$$\boxed{7\left[\frac{x^6}{6}\right] + C}$$

(III) Junto ambos y uso el dato

$$\ln(f(x)+3) + C = 7\frac{x^6}{6} + C$$

$$e^{\ln(f(x)+3)} = e^{7\frac{x^6}{6} + C}$$

$$f(x) + 3 = e^{7\frac{x^6}{6} + C}$$

$$f(x) = e^{7\frac{x^6}{6} + C} - 3$$

Sigue atrás →

Escaneado con CamScanner

$f(x) = e^{7\frac{x^6}{6}+C} - 3$

$\boxed{\text{uso } f(1) = -2}$

$$-2 = e^{7\frac{1}{6}+C} - 3$$

$$1 = e^{7\frac{1}{6}+C}$$

$$\ln(1) = \ln\left(e^{7\frac{1}{6}+C}\right)$$

$$0 = 7 \cdot \frac{1}{6} + C$$

$$\boxed{-\frac{7}{6} = C} \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{7\frac{x^6}{6} - \frac{7}{6}} - 3}$$

Verificación III

$f(1) = -2$

$f(1) = e^{7\frac{1}{6} - \frac{7}{6}} - 3$

$f(1) = 1 - 3 \rightarrow \boxed{-2}$ Cumple!

$\text{''} \quad (x),8$

① $g(x) = 1 - 3x + \ln\left(f(x)\right)$ si $P_3\Big]_f^{x_0=0} = 1 + 2x + 3x^2 - 4x^3$ ( ) (Max 2)

⊛ Hallar el $P_2\Big]_g^{x_0=0}$

$\Rightarrow$ Plan: Busco $= P_2(g) = \frac{g(0)}{0!} + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2$

Tengo: $\frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + 2x + 3x^2 - 4x^3$

$\Rightarrow \boxed{f(0) = 1}\,;\ \boxed{f'(0) = 2}\,;\ \boxed{f''(0) = 6}\,;\ f'''(0) = \frac{x}{6} = -4 \rightarrow \boxed{f'''(0) = -24}$

I $g(0) = 1 - 3\cdot(0) + \ln(1) \rightarrow \boxed{g(0) = 1}$

II $g'(x) = -3 + \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) \rightarrow g'(0) = -3 + \frac{1}{1}\cdot 2 \rightarrow \boxed{g'(0) = \cancel{-6}}$ $-3+2=-1.$

III $g''(x) \Rightarrow$ si se que $g'(x) = -3 + \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow g''(x) = \frac{\left(f''(x)\cdot f(x)\right) - \left(f'(x)\, f'(x)\right)}{\left(f(x)\right)^2}$

$\Rightarrow g''(0) = \frac{(6\cdot 1) - (2\cdot 2)}{1^2} \Rightarrow \boxed{g''(0) = 2}$

$\xrightarrow[\text{AWS}]{\text{sigue}}$

$\Rightarrow$ (*) Como yo buscaba un P_2 de esta forma: $\dfrac{g(0)}{0!} + \dfrac{g'(0)}{1!}x + \dfrac{g''(0)}{2!}x^2$

$\Rightarrow$ Reemplazo los valores hallados

(*) $g(0) = 1$; $g'(0) = -6$; $g''(0) = 2$

$$\boxed{\underbrace{P_2\Big]_{g(x)}^{x_0=0} = \frac{1}{0!} + \frac{-6}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{P_2\Big]_{g(x)}^{x_0=0} = 1 - \cancel{6}x + x^2}}$$

Escaneado con CamScanner

HOJA 3

(3) $f(x) = 5x + 3x\,e^{2x^2+1}$

$y = 5x$ para $x \in [-1; 1]$

Hago un esquema para entender bien el problema $\Rightarrow$

(I) Busco $f(x) \cap y$

$5x + 3x\,e^{2x^2+1} = 5x$

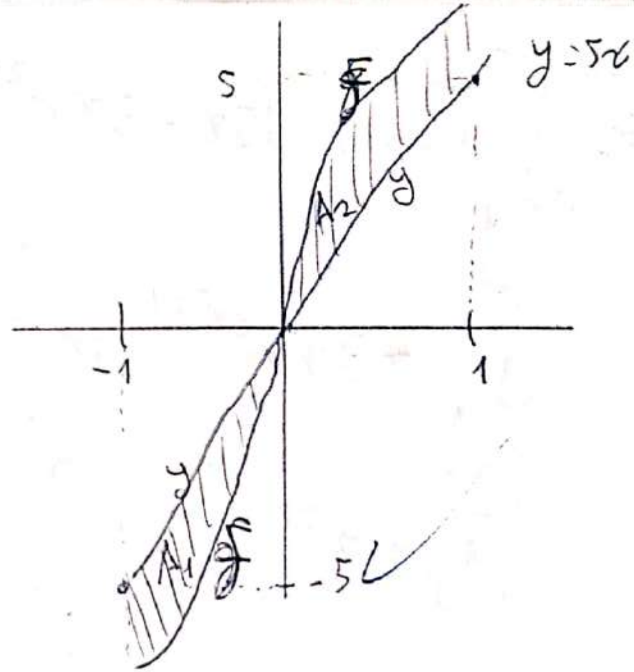
$3x\,e^{2x^2+1} = 0$

$\boxed{x = 0}$

Por notación se tomará $y = 5x = g(x) = 5x$

$\boxed{y = g(x)}$

(III)



(II) Evalúo en -1 y 1 para buscar "techo" y "piso"

$f(-1) = 5\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot e^{2(-1)^2+1}$

$f(-1) = -5 - 60{,}2$

$f(-1) = -65{,}2$

$g(-1) = -5$

en $[-1; 0]$, f será "piso" y g será "techo"

$f(1) = 5 + 3e^3$

$f(1) = 65{,}2$

$g(1) = 5$

(IV) ¿Qué busco entonces?

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} (5x) - \left(5x + 3x\,e^{2x^2+1}\right) + \int_{0}^{1} f(x)\,dx - 5x$$

Sigue atrás $\longrightarrow$

$$\Rightarrow \left[\int_{-1}^{0} (5\cancel{x}) - (5\cancel{x} + 3xe^{2x^2+1})\, dx\right] + \left[\int_{0}^{1} (5x + 3xe^{2x^2+1}) - (5x)\, dx\right]$$

$$\left[\int_{-1}^{0} -3xe^{2x^2+1}\, dx\right] + \left[\int_{0}^{1} 3xe^{2x^2+1}\, dx\right]$$

$$\left[-\int_{-1}^{0} 3xe^{2x^2+1}\, dx\right] + \left[\int_{0}^{1} 3xe^{2x^2+1}\, dx\right]$$

BUSCO LA INTEGRAL INDEFINIDA

$$\int 3xe^{2x^2+1}\, dx \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = 2x^2+1 \\ du = 4x\,dx \end{array}}$$

$$3\int xe^{2x^2+1}\, dx \cdot \frac{4}{4}$$

$$\frac{3}{4}\int e^{u}\, du$$

$$\frac{3}{4}\left[e^{u}\right] + C$$

$$\boxed{\frac{3}{4} e^{2x^2+1} + C}$$

$$\left[-3\int_{-1}^{0} xe^{2x^2+1}\, dx\right] + \left[3\int_{0}^{1} xe^{2x^2+1}\, dx\right]$$

$$\left[-\frac{3}{4} e^{2x^2+1} \Big|_{-1}^{0}\right] + \left[\frac{3}{4} e^{2x^2+1} \Big|_{0}^{1}\right]$$

BARROW

$$\left[-\frac{3}{4} e^{2\cdot(0)^2+1} + \frac{3}{4} e^{2(-1)^2+1}\right] + \left[\frac{3}{4} e^{2+1} - \frac{3}{4} e^{1}\right]$$

$$\left[-\frac{3}{4} e + \frac{3}{4} e^{3}\right] + \left[\frac{3}{4} e^{3} - \frac{3}{4} e^{1}\right]$$

SIGUE EN HO...

Hoja 4

$$\left[-\frac{3}{4}e + \frac{3}{4}e^3\right] + \left[\frac{3}{4}e^3 - \frac{3}{4}e\right]$$ Area simétrica

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{EL Area comprendida será igual a } = \left[-\frac{3}{4}e - \frac{3}{4}e + \frac{3}{4}e^3 + \frac{3}{4}e^3\right]}$

Lo que también se puede escribir de manera estimada así

$\cong 26,05$

④ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5^n+4}{3^n+2^n}\right)x^n$

HOJA 5

* APLICO CRITERIO DE CAUCHY:

$$-1<\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+4}{3^n+2^n}\,|x^n|}<1$$

$$-1<\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{5^n+4}}{\sqrt[n]{3^n+2^n}}\sqrt[n]{|x^n|}<1$$

$$-1<\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{5^n\left(1+\frac{4}{5^n}\right)}}{\sqrt[n]{3^n\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)}}|x|<1$$

$$-1<\lim_{n\to\infty}\frac{5\overbrace{\sqrt[n]{1+\underbrace{\tfrac{4}{5^n}}_{\to 0}}}^{\to 1}}{3\underbrace{\sqrt[n]{1+\underbrace{\tfrac{2^n}{3^n}}_{\to 0}}}_{\to 1}}|x|<1 \quad (*)$$

CA

* Como $\frac{2^n}{3^n}$ $3>2 \Rightarrow \to 0$

$$-1<\frac{5}{3}x<1$$

$$-3<5x<3$$

$$\boxed{-\frac{3}{5}<x<\frac{3}{5}}$$

* HASTA AHORA lo que SABEMOS es que LA SERIE VA A CONVERGER EN $x\in\left(-\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right)$; lo que falta es chequear LOS EXTREMOS para ver si CONVERGEN.

Ⅱ CHEQUEO EXTREMOS: $x=\boxed{-\frac{3}{5}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n+4}{3^n+2^n}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n+4}{3^n+2^n}\right)(-1)^n\left(\frac{3^n}{5^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n(5^n+4)}{5^n(3^n+2^n)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{15^n+12^n}{15^n+10^n}\right)\to\lim_{n\to\infty}\left(\frac{15^n\left(1+\frac{12^n}{15^n}\right)}{15^n\left(1+\frac{10^n}{15^n}\right)}\right)$$

sigue atrás →

Escaneado con CamScanner

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{15^n}\left(1+\frac{12^n}{15^n}\right)}{\cancel{15^n}\left(1+\underbrace{\frac{10^n}{15^n}}_{\to 0}\right)}\right)$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}$ con $x = -\frac{3}{5} = 1$

Lo cual es $\neq 0$ entonces en $x = -\frac{3}{5}$ la serie no converge ya que es condición necesaria

A la vez con $x = \frac{3}{5}$ también el límite tenderá a 1, lo cual $\neq 0 \Rightarrow$ la serie también diverge en $x = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow$ La serie converge con $x \in \left(-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right)$

y la serie diverge en el intervalo $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}; +\infty\right)$