¡Felicitaciones! ☺

D ANÁLISIS (ING. Y EX.) (66) 2^{do} PARCIAL 1^{er} CUATRIMESTRE DE 2019 **Tema 3**

APELL[redacted] NOMB[redacted]

NOTA del 1^{er} parcial: 10

INSCRIPTO EN:

SEDE:	DÍAS: L X J
HORARIO: 17 - 20	AULA: 214
PROMOCIONA 10 (diez)	~~RECUPERA: 11 de jul 10hs~~ 1ro 2do
~~INSUFICIENTE~~	~~FINAL: 24 de jul 10hs ó 5 de ago 10hs~~

1	2	3	4	NOTA
B-	B	B	B	10 (diez)

Duración: 2:30 hs

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1.- Sea g una función derivable tal que $g(5) = -6$ y $g'(5) = 3$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \ln(x-7) + \int_5^{x^2-59} g(t)\,dt$ en $x_0 = 8$.

2.- Hallar $f : [6, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{3f(x)}{x-5} + f(x) = f'(x)$ y $f(6) = e^{13}$.

3.- Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = 7\sqrt{x}$ y $g(x) = x$ para $36 \leq x \leq 64$.

4.- Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\,(x-2)^n}{3^n + n^2\,6^n}$ es convergente.

[redacted]

$$f(8) = \ln(1) + \underbrace{\int_5^5 g(t)\,dt}_{=0} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-7} + \left(\int_5^{x^2-59} g(t)\,dt\right)'$$

C. Aux

$$\boxed{\left(\int_5^{x^2-59} g(t)\,dt\right)' \overset{TFC}{=} g(x^2-59)\,.\,2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-7} + g(x^2-59)\,.\,2x$$

$$f'(8) = \frac{1}{8} + \underbrace{\underbrace{g(5)}_{-6}\,.\,2.8}_{-96} = -\frac{767}{8}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} + g'(x^2-59)\,.\,2x\,.\,2x + g(x^2-59)\,.\,2$$ OK Arrastrás el error

$$f''(8) = -\frac{1}{64} + 3\,.\,2.8\,.\,2.8 + -6\,.\,2 = \frac{48383}{64}$$

$$P(x) = \sum_{m=0}^{i} \frac{f(x_0)^{(m)}}{m!}\,.\,(x-x_0)^m$$

$\cancel{P_2(x) = 2(x-8)}$ $\boxed{P_2(x) = \frac{-767}{8}(x-8) + \frac{48383}{64}\,.\,\frac{1}{2}(x-8)^2}$ Rta

2) $f:[6,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(6)=e^{13}$

$$\frac{3f(x)}{x-5}+f(x)=f'(x)$$

$$f(x)\left(1+\frac{3}{x-5}\right)=f'(x)$$

$$1+\frac{3}{x-5}=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\int\left(1+\frac{3}{x-5}\right)dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

C. Aux

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{u}du=\ln(|u|)+c=\underline{\ln(|f(x)|)+c}$$

$u=f(x)$

$du=f'(x)$

C. Aux

$$\int\left(1+\frac{3}{x-5}\right)dx=\int 1\,dx+\int\frac{3}{x-5}dx$$

$$\int 1\,dx=\underline{x+C}\qquad \int\frac{3}{x-5}dx=\int\frac{3}{u}du=3\int\frac{1}{u}du=\underline{3\ln(|x-5|)+\cancel{c}}$$

$u=x-5$

$du=1\,dx$

$$\ln(|f(x)|)=x+3\ln(|x-5|)+c$$

$$\cancel{\ln(|f(6)|)=6+3\ln(1)+c=e^{13}}$$

$$\cancel{6+c=e^{13}}$$

$$\cancel{c=e^{13}-6}$$

imera

[redacted]

$$\ln(|f(x)|) = x + 3\ln(|x-5|) + c$$

$$e^{\ln(|f(x)|)} = e^{x} \cdot e^{\ln(|x-5|^3)} \cdot e^{c}$$

¿Por qué sacás el módulo?

$$\Rightarrow f(x) = e^{x} \cdot (x-5)^3 \cdot e^{c}$$

$$f(6) = e^{6} \cdot 1^3 \cdot e^{c} = e^{6+c} = e^{13} \Rightarrow 6+c = 13$$

$$c = 7$$

$$\boxed{f(x) = e^{x + 3\ln(x-5) + 7}}$$

Rta: $f(x) = e^{x + \ln(x-5)^3 + 7}$ satisface la condición inicial y es solución a la ecuación.

3) $f(x) = 7\sqrt{x}$

$g(x) = x$ para $36 \leq x \leq 64$

Busco los puntos en los que ambas funciones se cruzan:

$7\sqrt{x} = x$

$x = 0$ es solución

$7 = \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}$ $\quad 7 = x \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$7 = x^{\frac{1}{2}}$

$\underline{7^2 = x}$ Soluciones $= 0$ y 49

Como busco el área entre $(36, 64)$ descarto $x = 0$

Intervalos a considerar para encontrar "techos" y "pisos":

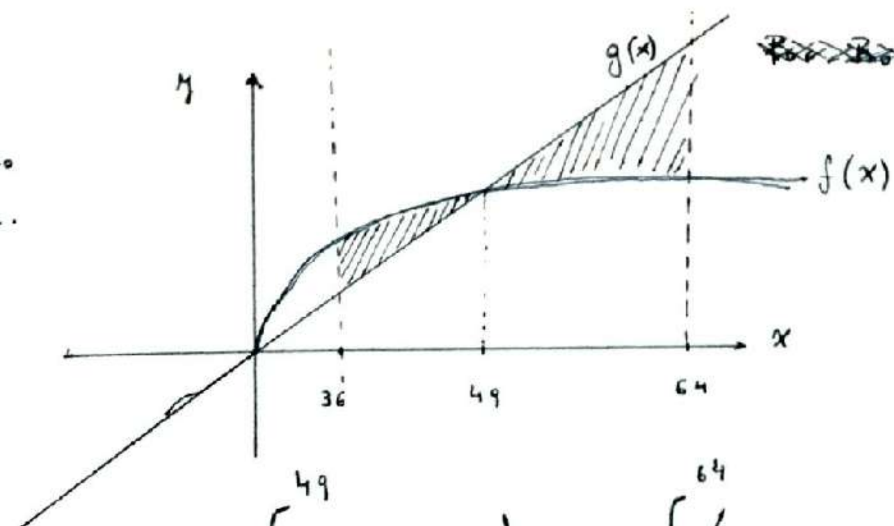
	$(36, 49)$	$(49, 64)$
techo	f	g
piso	g	f

$f(37) = 42{,}57\ldots \quad g(37) = 37$

$f(50) = 49{,}49\ldots \quad g(50) = 50$

~~Por lo tanto, porque~~

Gráfico aprox.



$$A = \int_{36}^{49} \left(f(x) - g(x) \right) dx + \int_{49}^{64} \left(g(x) - f(x) \right) dx$$

ntimería [redacted]

alculo las integrales indefinidas: de

$$\boxed{\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c}$$

$$\boxed{\int 7\sqrt{x}\,dx = 7\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 7\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} = \underline{\frac{14}{3}x^{\frac{3}{2}} + C}}$$

$$\cancel{A_1 = \int_{36}^{49}\left(x - 7\sqrt{x}\right)dx \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Barrow}}}{=} x - 7\sqrt{x}\Big|_{36}^{49} = 49 - 7\sqrt{49} - \left(36 - 7\sqrt{36}\right) = 6}$$

$$\cancel{A_2 = \int_{49}^{64}\left(7\sqrt{x} - x\right)dx \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Barrow}}}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{14}{3}x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cancel{A_1 = \int_{36}^{49}\left(x - 7\sqrt{x}\right)dx \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Barrow}}}{=} \frac{x^2}{2} -}$$

$$A_1 = \int_{36}^{49}\left(7\sqrt{x} - x\right)dx \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Barrow}}}{=} \frac{14}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{36}^{49} = \frac{14}{3}49^{\frac{3}{2}} - \frac{49^2}{2} - \left(\frac{14}{3}36^{\frac{3}{2}} - \frac{36^2}{2}\right) = \boxed{\frac{241}{6}}$$

$$A_2 = \int_{49}^{64}\left(x - 7\sqrt{x}\right)dx \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Barrow}}}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{14}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{49}^{64} = \frac{64^2}{2} - \frac{14}{3}64^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{49^2}{2} - \frac{14}{3}49^{\frac{3}{2}}\right) = \boxed{\frac{353}{6}}$$

$$\boxed{A_{Total} = \frac{241}{6} + \frac{353}{6} = 99}$$

Rta: el área pedida es 99.

4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-2)^n}{3^n + n^2 \cdot 6^n}$$

Utilizo el criterio de Cauchy para ~~to~~ encontrar el radio de convergencia:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2(x-2)^n}{3^n+n^2 6^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}\cdot \cancel{\sqrt[n]{|x-2|^n}}}{\cancel{\sqrt[n]{3^n}}\cdot\sqrt[n]{1+n^2.2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}\cdot|x-2|}{3\cdot\sqrt[n]{1+n^2.2^n}}$$

C. Aux

$$\boxed{\frac{n^2(x-2)^n}{3^n+n^2 6^n} = \cancel{\frac{n^2(x-2)^n}{3^n\left(\frac{n^2}{3^n}+\right.}} = \frac{n^2(x-2)^n}{3^n\left(1+n^2.2^n\right)}}$$

C. Aux

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n^2.2^n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n\left(\frac{1}{2^n}+n^2\right)} = \lim_{n\to\infty} 2.\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+n^2} = 2$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+n^2} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{\sqrt[n]{n^2}}^{\to 1}\cdot|x-2|}{3\cdot\underbrace{\sqrt[n]{1+n^2.2^n}}_{\to 2}} = \frac{1}{6}|x-2|$$ → quiero que sea < 1

$$-1 < \frac{1}{6}(x-2) < 1$$

$$-6 < x-2 < 6$$

$$-4 < x < 8$$ ⇒ La serie converge absolutamente cuando x está en el intervalo $(-4, 8)$ y diverge en $(-\infty,-4)\cup(8,+\infty)$.

Necesito comprobar el comportamiento de la serie en los bordes: $x=-4$ y $x=8$

la misma

[redacted] de 4

a) $$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 (-6)^m}{3^m + m^2 \cdot 6^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \cdot (6)^m}{3^m + m^2 \cdot 6^m} \cdot (-1)^m$$

b) $x = 8$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \cdot 6^m}{3^m + m^2 \cdot 6^m}$$

a) Pruebo convergencia absoluta

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{m^2 \cdot 6^m}{3^m + m^2 \cdot 6^m} \right|$$

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{m^2 \cdot 6^m}{3^m + m^2 \cdot 6^m} = \lim_{m \to +\infty} \frac{m^2 \cdot \cancel{6^m}}{\cancel{6^m}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^m + m^2\right)} = \lim_{m \to +\infty} \frac{m^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^m + m^2} =$$

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{\cancel{m^2}}{\cancel{m^2}\left(1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^m}{m^2}\right)} = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^m}^{\to 0}}{m^2}}_{\to 0}} = \boxed{1}$$

No se cumple la condición ~~es~~ necesaria para que la serie ~~conv~~ sea convergente (que el $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$)

Como el límite en el infinito del módulo de la serie (a) es ~~dos~~ 1, el límite de la serie en el infinito va a oscilar entre 1 y -1. En cualquier caso no se cumple la condición necesaria para que la serie sea convergente.

Como (b) es igual al módulo de la serie (a), (b) tampoco converge.

Rta: La serie es convergente para todos los x del intervalo $(-4, 8)$.

La serie diverge en $(-\infty, 4] \cup [8, +\infty)$.

¡excelente parcial!