Práctica 1

Álgebra vectorial - Primera parte

Ejercicios

Ejercicio 1. Dados los puntos $P = (3, 1)$ y $Q = (1, -5) \in \mathbb{R}^2$:

a) Graficarlos en el plano.

b) Calcular y representar gráficamente los puntos $P + Q$, $P - Q$, $3.P$, $-2.Q$ y $P + \frac{1}{2}Q$.

c) Representar en un mismo gráfico $3.P$, $-2.Q$ y $3.P - 2.Q$.

d) Graficar los conjuntos $A = \{a.P \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{b.Q \in \mathbb{R}^2 \ / \ b \in \mathbb{R}\}$

e) Determinar geométricamente para qué valores de (x, y) existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a.P + b.Q = (x, y)$.

Ejercicio 2.

a) Representar gráficamente en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (1, 1, 0)$, $R = (1, 1, 1)$ y calcular y representar gráficamente los puntos $S = P + Q$, $T = Q - R$ y $V = \frac{1}{2}.R - P$.

b) Un cubo tiene vértices en $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Escribir las coordenadas de los otros 4 vértices.

c) Hallar, si es posible, a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que $(1, 2, 3) = a.(1, 0, 0) + b.(1, 1, 0) + c.(1, 1, 1)$.

Ejercicio 3. Efectuar las operaciones indicadas en cada caso.

a) Si $P = (2, 3, 0, -2)$ y $Q = (1, 4, -2, -1) \in \mathbb{R}^4$, calcular $R = P + 3.Q$ y $S = 2.P - \frac{1}{3}.Q$.

b) Si $P = (1, 0, -3, 0, 2)$ y $Q = (0, -1, -2, 0, 4) \in \mathbb{R}^5$, calcular $R = -P + 2.Q$ y $S = -2.P - \frac{2}{3}.Q$.

Ejercicio 4. Dados en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 5)$ y $\mathbf{v}_3 = (3, -1)$:

a) Graficarlos.

b) Graficar $\mathbf{w}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (2, 5)$ y $\mathbf{w}_3 = (-3, -1)$. ¿Qué efecto geométrico produce cambiar el signo a la primera coordenada de un vector?

c) Graficar $\mathbf{z}_1 = (1,-2)$, $\mathbf{z}_2 = (-2,-5)$ y $\mathbf{z}_3 = (3,1)$. ¿Qué efecto geométrico produce cambiar el signo a la segunda coordenada de un vector?

d) Graficar $-\mathbf{v}_1$, $-\mathbf{v}_2$ y $-\mathbf{v}_3$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar un vector por -1?

Ejercicio 5. Dados en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $P_1 = (-2,1)$, $P_2 = (-2,3)$ y $P_3 = (-3,3)$ y el vector $\mathbf{t} = (4,2)$:

a) Graficarlos.

b) Graficar, con la misma escala, el triángulo de vértices $P_1 + \mathbf{t}$, $P_2 + \mathbf{t}$ y $P_3 + \mathbf{t}$ y el triángulo de vértices $P_1 - \mathbf{t}$, $P_2 - \mathbf{t}$ y $P_3 - \mathbf{t}$. ¿Qué efecto geométrico produce sumar el vector $\mathbf{t}$? ¿Y restarlo?

c) Graficar, con la misma escala, el triángulo de vértices $2.P_1$, $2.P_2$ y $2.P_3$ y el triángulo de vértices $\frac{1}{2}.P_1$, $\frac{1}{2}.P_2$ y $\frac{1}{2}.P_3$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar por 2? ¿Y por $\frac{1}{2}$?

Ejercicio 6. Dado un vector se le realizan dos operaciones consecutivas: primero se lo multiplica por un escalar fijo (dilatación) y luego se le suma otro vector fijo (traslación).

a) Si se le aplican estas dos operaciones al vector $\mathbf{v} = (1,2)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega al vector $\mathbf{w} = (-6,12)$. ¿Se puede decidir cuál fue la dilatación y cuál la traslación? (Sugerencia: buscar si es posible llegar de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ de dos formas distintas).

b) Si se le aplican las dos operaciones a $\mathbf{v}_1 = (1,2)$ y a $\mathbf{v}_2 = (3,4)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega a $\mathbf{w}_1 = (-6,12)$ y a $\mathbf{w}_2 = (-5,13)$ respectivamente. Hallar el escalar que da la dilatación y el vector que da la traslación.

c) ¿Puede ser que luego de aplicar la misma dilatación y la misma traslación a los vectores $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ y $\mathbf{v}_2 = (2,-4)$ se llegue a los vectores $\mathbf{w}_1 = (2,4)$ y $\mathbf{w}_2 = (-2,3)$ respectivamente?

d) Si se le aplican las dos operaciones en $\mathbb{R}^3$ a $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$ se llega a $\mathbf{w}_1 = (2,1,5)$. Probar que, si λ es el escalar que da la dilatación, al aplicarle las mismas dos operaciones a $\mathbf{v}_2 = (2,1,3)$ se llega a $(\lambda+2,1,2\lambda+5)$.

Ejercicio 7.

a) En cada caso, graficar los vectores de $\mathbb{R}^2$ involucrados, calcular el producto escalar $\cdot$ indicado y determinar si son ortogonales:

$$(1,-1)\cdot(2,4); \quad (1,3)\cdot(-6,2); \quad (1,2)\cdot(1,2); \quad (-1,0)\cdot(0,1)$$

b) En cada caso, calcular el producto escalar indicado de vectores de $\mathbb{R}^3$ y decidir si son ortogonales:

$$(1,3,5)\cdot(3,0,-2); \quad (-1,2,1)\cdot(6,1,4); \quad (2,4,-2)\cdot(-3,-6,3); \quad (1,0,0)\cdot(0,1,1)$$

c) Hallar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^2$ que sean ortogonales a $(5,-3)$. ¿Qué relación cumplen entre sí?

d) Encontrar dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1,1,2)$ que no sean paralelos entre sí.

e) Hallar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a $(1,2,1)$ y a $(1,-3,0)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre sí?

f) Dados $\mathbf{v}=(1,2)$; $\mathbf{w}=(-1,5)$ y $\mathbf{z}=(3,1)$, calcular

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}; \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}; \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{z}; \quad \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}+\mathbf{z}); \quad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}); \qquad (5.\mathbf{v})\cdot\mathbf{z}; \qquad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}-3.\mathbf{z}).$$

¿Qué relaciones se cumplen?

g) Dados $\mathbf{v}=(1,1,1)$; $\mathbf{w}=(1,-1,3)$ y $\mathbf{z}=(2,-1,1)$, calcular

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}; \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}; \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{z}; \quad \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}+\mathbf{z}); \quad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}); \qquad (5.\mathbf{v})\cdot\mathbf{z}; \qquad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}-3.\mathbf{z}).$$

¿Qué relaciones se cumplen?

Ejercicio 8. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas para vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$:

a) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $-\mathbf{w}$ y a $5.\mathbf{w}$.

b) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ y a $\mathbf{z}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}+\mathbf{z}$ y a $3.\mathbf{w}-2.\mathbf{z}$.

c) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$.

d) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ y a $\mathbf{w}-3.\mathbf{z}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{z}$.

Ejercicio 9. Dados $\mathbf{v} = (3, -4)$ y $\mathbf{w} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$, calcular

$$\|\mathbf{v}\|, \quad \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|, \quad \|2\mathbf{v}\|, \quad \left\|\tfrac{1}{2}\mathbf{v}\right\|, \quad \left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\|.$$

Ejercicio 10. Graficar en el plano el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 2\}$.

Ejercicio 11. Calcular la distancia entre los puntos dados y el ángulo entre los vectores determinados por ellos.

a) $(2, 3)$ y $(5, 1)$

b) $(1, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 1)$

c) $(1, 0, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 1, 1)$

d) $(0, -1, 1)$ y $(-\sqrt{2}, 1, 1)$

Ejercicio 12. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que

a) la norma del vector $(2, -2, k)$ es igual a 3.

b) el ángulo entre los vectores $(2, 1, 1)$ y $(1, -1, k)$ es $\dfrac{\pi}{3}$.

Ejercicio 13. Hallar los ángulos que forman los vectores dados con los semiejes coordenados positivos.

a) $(1, -1)$, $(-1, \sqrt{3})$ y $(1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$.

b) $(1, 0, -1)$, $(0, 2, 0)$ y $(1, -1, 2)$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 14. Para cada vector $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^2$, notamos $\theta_{\mathbf{u}}$ al ángulo que forma con el semieje positivo de las x. En cada uno de los siguientes casos, dar las coordenadas del vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$:

a) $\|\mathbf{u}\| = 4,\ \theta_{\mathbf{u}} = 0,\ \|\mathbf{v}\| = 2,\ \theta_{\mathbf{v}} = \dfrac{2\pi}{3},\ \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

b) $\|\mathbf{u}\| = 1,\ \theta_{\mathbf{u}} = \dfrac{\pi}{4},\ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \sqrt{2},\ \theta_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \dfrac{\pi}{2},\ \mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Ejercicio 15. Sabiendo que el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\dfrac{\pi}{3}$, $\|\mathbf{w}\| = 4$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, calcular $\|\mathbf{v}\|$.

Ejercicio 16. Sea $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(0, 0)$.

a) Graficarla.

b) Encontrar dos vectores dirección distintos para $\mathbb{L}$. Graficarlos.

c) Dar una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}$. ¿Es única?

d) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L}$: $(-3,-2)$, $(2,3)$, $(0,0)$, $(-6x,-2x)$.

e) ¿Es $\mathbb{L}$ igual a la recta $\mathbb{L}' : X = \lambda.(300,200) + (3,2)$?

Ejercicio 17. Sea $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(-2,2)$.

a) Graficarla.

b) Encontrar dos vectores dirección distintos para $\mathbb{L}$. Graficarlos.

c) Dar dos ecuaciones paramétricas para $\mathbb{L}$.

d) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L}$: $(-3,1)$, $(4,0)$, $(0,0)$, $(-3x+1, x+1)$.

e) ¿Es $\mathbb{L}$ igual a la recta $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-27,9) + (-14,6)$? ¿Y a la recta $\mathbb{L}'' : X = \lambda.(27,-9) + (-27,9)$?

Ejercicio 18. Un móvil se desplaza por el plano $\mathbb{R}^2$ de forma tal que, en tiempo t, se encuentra en el punto $t.(3,-2) + (1,1)$.

a) Graficar la trayectoria del móvil si parte en tiempo $t = 0$.

b) Graficar los puntos donde se encuentra en tiempo $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$.

c) Si $P(t)$ es el punto en el que se encuentra en tiempo t, calcular $P(0)$ y $P(t+1) - P(t)$ para un valor genérico de t. ¿Qué relación tienen con los datos dados?

d) Si hay una pared ubicada en la recta vertical de ecuación $x = 16$, ¿en qué momento choca el móvil contra la pared?

e) Repetir los distintos ítems con un móvil que se desplaza según la ecuación $t.(6,-4) + (1,1)$ para $t \geq 0$ y con otro que se desplaza según $t.(\frac{3}{2},-1) + (1,1)$ para $t \geq 0$. ¿Cómo son las trayectorias? ¿En qué se diferencian los movimientos?

Ejercicio 19. Dada la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2) + (3,2)$:

a) Dar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}_1$ paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por $(0,0)$.

b) Dar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}_2$ paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por $(-1,-6)$.

c) Graficar $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Qué relación cumplen $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$? Justificar.

Ejercicio 20. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por $(-1,2)$ y $(0,3)$.

a) Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}_1$ perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $(0,0)$.

b) Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}_2$ perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $(1,2)$.

c) Graficar las tres rectas en un mismo sistema de coordenadas. ¿En qué posición relativa están $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$?

Ejercicio 21. Sean $P=(4,9)$, $Q=(-6,5)$ y $\mathbb{L}: X=\lambda.(1,2)$. Hallar todos los puntos $R\in\mathbb{L}$ tales que:

a) el triángulo PQR sea rectángulo en P.

b) el triángulo PQR sea rectángulo en R.

Ejercicio 22. Dadas $\mathbb{L}_1: X=\alpha.(5,-1)+(2,1)$, $\mathbb{L}_2$ la recta que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(-3,2)$, $\mathbb{L}_3$ la recta que pasa por los puntos $(5,5)$ y $(5,-1)$, $\mathbb{L}_4: X=\beta.(1,0)+(2,1)$ y $\mathbb{L}_5: x+3y=-1$:

a) Dar ecuaciones implícitas para $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{L}_3$ y $\mathbb{L}_4$.

b) Dar una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}_5$.

Ejercicio 23. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1: -x+3y=2$, $\mathbb{L}_2: -2x+6y=-3$ y $\mathbb{L}_3: x-3y=0$:

a) Representarlas gráficamente en el mismo plano. ¿Cuál es su posición relativa?

b) Notar que las ecuaciones de las rectas anteriores pueden escribirse usando el producto escalar: $\mathbb{L}_1: (-1,3)\cdot(x,y)=2$, $\mathbb{L}_2: (-2,6)\cdot(x,y)=-3$ y $\mathbb{L}_3: (1,-3)\cdot(x,y)=0$ ¿Qué relación tienen entre sí los vectores $(-1,3)$, $(-2,6)$ y $(1,-3)$ que aparecen en las ecuaciones?

c) Buscar un vector dirección distinto para cada una de las rectas. ¿Qué relación tienen los vectores dirección encontrados con los vectores $(-1,3)$, $(-2,6)$ y $(1,-3)$?

d) Dar una ecuación implícita de la recta paralela a $\mathbb{L}_1$ que pasa por $(-1,1)$.

Ejercicio 24.

a) Dar una ecuación paramétrica de la recta paralela a $\mathbb{L} : x = 2$ que pasa por $(3, 8)$.

b) Dar una ecuación implícita de la recta perpendicular a $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, 3) + (1, 2)$ que pasa por $(5, -2)$.

Ejercicio 25. Hallar, en cada caso, la intersección de las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ y decidir sus posiciones relativas:

a) $\mathbb{L}_1 : 3x + y = -3$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha(1, 3) + (2, 0)$.

b) $\mathbb{L}_1 : -2x + 3y = -13$ y $\mathbb{L}_2 : y = 7x + 2$.

c) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(-4, 1) + (2, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(-2, 1) + (0, -1)$.

d) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(-3, 2) + (5, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(6, -4) + (0, 1)$.

e) $\mathbb{L}_1 : x - 2y = -1$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2, 1) + (1, 1)$

Ejercicio 26. Sean $\mathbb{L}_1 : x - 2y = 3$, $\mathbb{L}_2 : -2x + y = -3$ y $\mathbb{L}_3 : X = \alpha.(1, -7)$.

a) Dar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por el punto de intersección de $\mathbb{L}_2$ y $\mathbb{L}_3$ y es paralela a $\mathbb{L}_1$.

b) Dar una ecuación implícita de la recta $\mathbb{L}'$ que pasa por el punto de intersección de $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ y es perpendicular a $\mathbb{L}_3$.

Ejercicio 27. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^3$ que:

a) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el origen de coordenadas.

b) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el punto $(0, 2, -3)$.

c) pasa por los puntos $(1, 5, 1)$ y $(-4, 3, 2)$.

d) es paralela a $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$ y pasa por el punto $(0, 3, 2)$.

e) pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a $(2, -2, 1)$ y a $(-3, 2, 1)$.

f) es perpendicular a $(2, 1, 0)$ y a $(0, -1, 2)$ simultáneamente y pasa por el origen.

g) es perpendicular a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(-1, 0, 2) + (2, 1, 0)$ simultáneamente y pasa por el punto $(0, 3, 2)$.

Ejercicio 28. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1,2,-1) + (1,3,5)$ y $\mathbb{L}_2$ la recta paralela a $\mathbb{L}_1$ que pasa por el punto $(3,2,4)$.

a) Hallar el punto de $\mathbb{L}_2$ que tiene coordenada $z = 0$.

b) Decidir si los puntos $(-1,-1,7)$ y $(1,-2,6)$ están en $\mathbb{L}_2$.

Ejercicio 29.

a) Decidir si los puntos $(1,2,-4)$, $(3,-2,0)$ y $(2,0,-2)$ están alineados.

b) Decidir si los puntos $(1,1,3)$, $(2,1,4)$ y $(2,1,5)$ están alineados.

c) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que los puntos $(2+a,3,-1)$, $(5,a+3,-2)$ y $(a,-1,1)$ están alineados.

Ejercicio 30. Sean $\mathbb{L} : X = \beta.(1,1,-2) + (0,0,4)$ y $P = (3,1,0)$. Determinar un punto $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que:

a) la recta que pasa por P y Q sea paralela a $\mathbb{L}$.

b) $Q \in \mathbb{L}$ y la recta que pasa por P y Q sea perpendicular a $\mathbb{L}$.

Ejercicio 31. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1,2,1) + (2,3,2) \qquad \mathbb{L}_2 : X = \beta.(0,1,-1) + (1,3,-1)$$
$$\mathbb{L}_3 : X = \gamma.(2,4,2) + (1,5,0) \qquad \mathbb{L}_4 : X = \delta.(2,4,2) + (3,5,3)$$

calcular las siguientes intersecciones y, en cada caso, dar la posición relativa de las rectas en el espacio:

a) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ *b*) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3$ *c*) $\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3$ *d*) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_4$

Ejercicio 32.

a) Dos móviles se desplazan por el espacio de forma tal que las ecuaciones de sus movimientos están dadas por $t.(1,2,-4) + (-1,3,0)$ y $t.(1,6,-10) + (2,1,0)$ para $t \geq 0$. Decidir si las trayectorias de los móviles se cruzan y, en caso afirmativo, decir en qué punto. ¿Se encuentran los dos móviles?

b) Mismo problema para las ecuaciones de movimiento $t.(1,2,0) + (0,3,2)$ y $t.(3,-4,0) + (1,5,7)$. ¿Son paralelas estas trayectorias?

Ejercicio 33.

a) En cada caso, calcular el producto vectorial indicado de vectores de $\mathbb{R}^3$. ¿En qué casos da $(0,0,0)$?

$$(1,3,5)\times(3,0,-2);\quad (-1,2,1)\times(6,1,4);\quad (2,4,-2)\times(-3,-6,3);$$

$$(0,0,0)\times(1,-1,3);\quad (a,b,c)\times(ka,kb,kc)$$

b) Dados $\mathbf{v}=(1,1,1)$; $\mathbf{w}=(1,-1,0)$ y $\mathbf{z}=(2,-1,1)$, calcular

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w};\quad \mathbf{w}\times\mathbf{v};\quad \mathbf{v}\times\mathbf{z};\quad \mathbf{v}\times(\mathbf{w}+\mathbf{z});\quad \mathbf{v}\times(3.\mathbf{w});\quad (5.\mathbf{v})\times\mathbf{z};\quad \mathbf{v}\times(2.\mathbf{w}-3.\mathbf{z})$$

¿Qué relaciones se cumplen?

c) Dados $\mathbf{v}=(1,1,1)$; $\mathbf{w}=(1,-1,0)$, calcular

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{v};\quad (\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}$$

¿Cómo resulta ser el vector $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ con respecto a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$?

d) Dar un vector que sea ortogonal a $(1,3,5)$ y a $(3,0,-2)$ simultáneamente.

Ejercicio 34. Dados los puntos $P=(1,-1,1)$, $Q=(2,0,3)$ y $R=(0,1,2)$, calcular el perímetro, los ángulos interiores y el área de:

a) el paralelogramo de lados PQ y PR.

b) el triángulo PQR. Decidir si es un triángulo isósceles, equilátero o escaleno.

Ejercicio 35. En cada caso, dar una ecuación implícita de:

a) los planos coordenados xy, xz y yz.

b) el plano Π perpendicular al vector $(1,-1,2)$ que pasa por el origen de coordenadas.

c) el plano Π perpendicular al vector $(1,-1,2)$ que pasa por el punto $(1,1,2)$.

d) el plano Π perpendicular a la recta $\mathbb{L}: X=\lambda.(2,1,-1)+(-2,4,1)$ que pasa por el punto $(-4,3,2)$.

e) el plano Π paralelo al plano $\Pi_1: 2x-3y+z=3$ que pasa por el punto $(0,1,2)$.

f) el plano Π que contiene a los puntos $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ y $(1,1,-1)$.

Ejercicio 36.

a) Decidir si el punto $(1,2,-3)$ está en el plano que pasa por los puntos $(1,1,0)$, $(2,3,-1)$ y $(5,0,2)$.

b) Decidir si los puntos $(1,1,0)$, $(2,3,-1)$, $(5,0,2)$ y $(0,-1,1)$ son coplanares (es decir, están en un mismo plano).

Ejercicio 37. Dados el plano $\Pi : 2x - 3y + 7z = 3$ y las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2,1,-1) + (-2,4,1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(2,-1,-1) + (-7,-1,2)$ y $\mathbb{L}_3 : X = \lambda.(-1,4,2) + (1,0,1)$:

a) Calcular las intersecciones $\Pi \cap \mathbb{L}_1$, $\Pi \cap \mathbb{L}_2$ y $\Pi \cap \mathbb{L}_3$ y dar sus posiciones relativas.

b) Un móvil se dirige hacia el plano Π según la ecuación de movimiento $t.(1,1,1) + (-7,0,-1)$ para $t \geq 0$. Calcular en qué tiempo llega al plano y en qué punto lo impacta.

Ejercicio 38. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de una recta en $\mathbb{R}^3$ que:

a) es perpendicular al plano $\Pi : 4x - 2y + z = 3$ y pasa por el punto $(0,1,-2)$.

b) es paralela a los planos $\Pi_1 : 3x - y + 2z = 4$ y $\Pi_2 : y + z = 3$ simultáneamente y pasa por el punto $(1,3,1)$.

c) es perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(0,0,1) + (1,3,-2)$ y está incluida en el plano $\Pi : x + y + z = 2$.

Ejercicio 39. Para cada $k \in \mathbb{R}$, se considera la recta $\mathbb{L}_k : X = \lambda.(k, k+2, 1) + (1,1,1)$.

a) Probar que, si $k \neq k'$, $\mathbb{L}_k$ y $\mathbb{L}_{k'}$ son rectas distintas.

b) Probar que, para cualquier valor de k, $\mathbb{L}_k$ está incluida en el plano $\Pi : x - y + 2z = 2$.

c) Probar que la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,1,0) + (1,1,1)$ es una recta incluida en el plano Π pero no es igual a $\mathbb{L}_k$ para ningún valor de k.

Ejercicio 40.

a) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas transversales $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2,-1) + (3,0,0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2,-4,1) + (5,4,-3)$.

b) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas paralelas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2,-1) + (3,0,0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2,-4,2) + (0,1,1)$.

c) ¿Existe algún plano que contenga simultáneamente a las rectas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2,0) + (3,0,-3)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2,0,0) + (0,2,3)$?

Ejercicio 41.

a) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_1 que pasa por $P = (2,-1,7)$, $Q = (0,2,3)$ y $R = (1,-1,2)$.

b) Verificar que P , Q y R pertenecen al plano $\Pi_2 : X = \alpha.(1,0,5) + \beta.(-1,3,1) + (1,-1,2)$. Deducir que, como P , Q y R no están alineados, Π_1 y Π_2 son el mismo plano.

c) Comparar las ecuaciones paramétricas de Π_1 y de Π_2 . ¿Son iguales?

d) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_3 paralelo a Π_1 que pasa por el punto $(1,0,2)$.

Ejercicio 42. Dar en $\mathbb{R}^3$ ecuaciones implícitas de:

a) el plano $\Pi_1 : X = \alpha.(1,0,5) + \beta.(-1,3,1) + (1,-1,2)$.

b) el plano paralelo al plano $\Pi_2 : X = \alpha.(1,3,2) + \beta.(2,5,3) + (3,2,1)$ que pasa por el punto $(2,3,1)$.

Ejercicio 43. Dar en $\mathbb{R}^3$ ecuaciones paramétricas de:

a) el plano perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \beta.(0,1,1) + (1,3,-1)$ que pasa por $(3,2,1)$.

b) el plano paralelo al plano $\Pi : 3x + 2y + z = 1$ que pasa por el punto $(1,1,1)$.

Ejercicio 44. Decidir en cada caso si los planos Π_1 y Π_2 se intersecan. En caso afirmativo, dar una ecuación paramétrica de la intersección.

a) $\Pi_1 : y = 0$ y $\Pi_2 : z = 2$

b) $\Pi_1 : x + z = 0$ y $\Pi_2 : y - z = 0$

c) $\Pi_1 : x + y - z = 0$ y $\Pi_2 : x + z = 2$

d) $\Pi_1 : x - z = 0$ y $\Pi_2 : 2x - 2z = 3$

e) $\Pi_1 : x + y - z = 1$ y $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 2$

Ejercicio 45. En cada caso, dar ecuaciones implícitas que definan la recta pedida.

a) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1,3,1) + (2,0,0)$.

b) $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(-3,0,1) + (1,1,1)$.

c) la recta $\mathbb{L}_3$ perpendicular al plano $\Pi_1 : X = \alpha.(1,0,5) + \beta.(-1,3,1) + (1,-1,2)$ que pasa por $(1,0,1)$.

d) la recta $\mathbb{L}_4$ perpendicular al plano $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 3$ que pasa por el punto $(2,1,-1)$.

e) la recta $\mathbb{L}_5$ que pasa por el origen y es paralela a los planos $\Pi_3 : 2x - y + z = 3$ y $\Pi_4 : X = \alpha.(1,3,1) + \beta.(0,2,1) + (1,-1,2)$ simultáneamente.

f) la recta $\mathbb{L}_6$ que pasa por el punto $(2,0,-1)$, está incluida en el plano $\Pi_5 : 3x - z = 7$ y es paralela al plano $\Pi_6 : X = \alpha.(2,0,-2) + \beta.(3,1,1) + (1,0,2)$ simultáneamente.

Ejercicio 46. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Dar ecuaciones paramétricas para $\mathbb{L}_1$ y para $\mathbb{L}_2$.

b) Decidir si son paralelas, coincidentes, alabeadas o se cortan en un punto.

Ejercicio 47. En cada caso, hallar la intersección de la recta $\mathbb{L}$ con el plano Π y decidir su posición relativa:

a) $\mathbb{L} : X = \alpha.(1,2,1) + (2,2,3)$
$\Pi : z = 0$

b) $\mathbb{L} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$ $\quad \Pi : y = 3$

c) $\mathbb{L} : X = \alpha.(0,1,-1) + (0,1,1)$
$\Pi : y + z = 2$

d) $\mathbb{L} : X = \alpha.(0,1,-1) + (0,1,1)$
$\Pi : y + z = 0$.

e) $\mathbb{L} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$ $\quad \Pi : X = \alpha.(1,0,0) + \beta.(0,1,-2) + (0,0,1)$