

APELLIDO NOMBRES DNI

1	2	3	4	NOTA
B	B	B	B	10 (die)

INSCRIPTO EN:

SEDE: CIUDAD (2)	DÍAS: Ha, Hi, Vj
HORARIO: 10-13	AULA: 11

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1.- Sean $L_1 : X = \lambda(1, -1, 0) + (0, 5, 4)$ y $L_2 : X = \lambda(-2, 1, 1) + (3, 0, -3)$. Hallar una recta L tal que $L \perp L_1$, $L \perp L_2$, $L \cap L_1 \neq \emptyset$ y $L \cap L_2 \neq \emptyset$.

2.- Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $(1, k-1, -1)$ es una de las infinitas soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & k & 7-2k \\ 4 & -3 & k \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1-k \\ k-7 \\ 7-4k \end{pmatrix}.$$

3.- Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$, $H_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$ y $S = \langle (2, -1, 0, 1), (1, 1, -1, 1) \rangle$. Hallar un subespacio $T \neq H_1$ tal que $T + (H_1 \cap H_2) = H_1$ y $T \cap S \neq \{0\}$.

4.- Sean $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (-1, 1, 0)\}$ y $B' = \{v; (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Hallar el vector v sabiendo que sus coordenadas en la base B son $(1, 0, 1)$ y calcular las coordenadas de $(2, 3, 5)$ en la base B' .

$$\textcircled{1} \quad L_1: \lambda(1-10) + (0.54)$$

$$L_2: \lambda(-2.11) + (3.0-3)$$

$$L \perp L_1, \quad L \perp L_2 \quad \underbrace{L \cap L_1 \neq \emptyset \quad L \cap L_2 \neq \emptyset}$$

tiene que haber
intersección

$$L \perp L_1 \text{ y } L \perp L_2$$

$$(V_{d1}) \times (V_{d2})$$

$$(1-10) \times (-2.11) = (-1, -1, -1) \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$V_{d1} = (1, 1, 1) \quad \checkmark$$

$$L: \lambda(1, 1, 1) + P \quad \checkmark$$

Busco $L \cap L_2$

~~$$\lambda(1-10) + (0.54) = \alpha(-2.11) + (3.0-3)$$~~

~~$$(\lambda, -\lambda+3, 4) = (-2\alpha+3, \alpha, \alpha-3)$$~~

~~$$\lambda = -2\alpha + 3$$~~

~~$$-\lambda + 3 = \alpha$$~~

~~$$4 = \alpha + 3$$~~

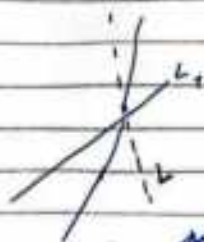
~~$$-\lambda + 3 = 1 \quad -\lambda = -4 \quad \boxed{\lambda = 4}$$~~

~~$$\alpha = 1$$~~

~~$$4 = -2 \cdot 1 + 3$$~~

~~$$\boxed{4 \neq 1}$$~~

No hay intersección



14

no hay intersección ✓

Busca $L_1 \cap L_2$

$$\lambda(-2 \ 1 \ 1) + (3 \ 0 \ 3) = \alpha(1 \ -1 \ 0) + (0 \ 5 \ 4)$$

$$(-2\lambda + 3, \lambda, \lambda - 3) = (\alpha, -\alpha + 5, 4)$$

$$-2\lambda + 3 = \alpha$$

$$\lambda = -\alpha + 5$$

$$7 = -\alpha + 5$$

$$\lambda - 3 = 4$$

$$\boxed{\lambda = 7}$$

$$\boxed{\alpha = -2}$$

$$-2 \cdot 7 + 3 = -11 \neq -2$$

$$\boxed{-11 \neq -2}$$

NO hay intersección
están en diferentes planos.

Intento buscar el plano que contiene

Busca Π_1 que contenga L_1 y L_2

$$\lambda \underbrace{(1 \ 1 \ 1)}_{\text{V de } L_1} + \alpha \underbrace{(1 \ -1 \ 0)}_{\text{V de } L_2} + (0 \ 5 \ 4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot x \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = N$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Pi_1 = x + y - 2z = -3}$$

CL

CL₁

$$0 + 5 - 8 = -3$$

Busca Π_2 que contenga a L_1 y L_2

$$\lambda(1,1,1) + \alpha(-2,1,1) + (3,0,-3)$$

$$(1,1,1) \cdot \lambda(-2,1,1) = N \quad \begin{matrix} 1,1,1 \\ -2,1,1 \end{matrix}$$

$$N = (0, -3, 0) = (0, -1, 1)$$

$$\Pi_2: y + z = -3 \quad \Pi_2: -3y - 3z = 9$$

$$0 - 3 + 0 = -3$$

$$-3(0) - 3(-3) = 9$$

Busca la intersección entre los Π_1 y Π_2

$$\Pi_1 \cap \Pi_2$$

$$x + y - 2z = -3$$

$$\Pi_2: -y + z = -3$$

$$-0 - 3 = -3 = -3$$

Busca $\Pi_1 \cap \Pi_2$

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -3 \\ -y + z &= -3 \end{aligned}$$

$$z = -3 + y$$

$$x + y - 2(-3 + y) = -3$$

$$x + y + 6 - 2y = -3$$

$$x - y = -9$$

$$x = -9 + y$$

$$(-9 + y, y, -3 + y)$$

$$y(1, 1, 1) + (-9, 0, -3)$$

la recta de la intersección

Por lo tanto.

Resp: $L: \lambda(1,1,1) + (-9,0,-3)$ ✓

Checka que L tenga intersección con L_1

$$\lambda(1,1,1) + (-9,0,-3) = \mu(1,-1,0) + (0,5,4) = (\lambda-9, \lambda, \lambda-3) = (\mu, -\mu+5, 4)$$

$(-2, 7, 4)$ existe ✓✓

$\lambda = 7$ $\mu = -2$ y eso es todo

Checka que L tenga intersección con L_2

$$\lambda(1,1,1) + (-9,0,-3) = \mu(-2,1,1) + (3,0,-3) = (\lambda-9, \lambda, \lambda-3) = (-2\mu+3, \mu, \mu-3)$$

$(-5, 4, 1)$ existe ✓✓

$\lambda - 9 = -2\mu + 3$

$-9 - 3 = -2\mu - 1 = -12 - 3\mu$

$\lambda = 4$

$\mu = 4$

② Hallar k

$(1, k-1, -1)$ es una de las
sol. del sistema
(S.C.I.)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & k & 7-2k \\ 4 & -3 & k \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1-k \\ k-7 \\ 7-4k \end{pmatrix}$$

$A \quad X = b$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 1-k \\ -X_1 + kX_2 + (7-2k)X_3 = k-7 \\ 4X_1 - 3X_2 + kX_3 = 7-4k \end{cases}$$

Triangula.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1-k \\ -1 & k & 8-2k & k-2 \\ 4 & -3 & k & 7-4k \end{array} \right) \begin{array}{l} f_2 + f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 - 4f_1 \rightarrow f_3 \end{array} \quad \text{PA}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1-k \\ 0 & k-1 & 8-2k & -6 \\ 0 & 1 & k-4 & 3 \end{array} \right) \quad \text{CA}$$

$$k-2 + 1 - k = -6$$

$$7-4k - 4(1-k)$$

$$7-4k + 4k - 4 = 3$$

Sea el determinante y lo igualo a 0 para que el sistema sea S.C.I.

$$(k-1)(k-4)$$

$$k^2 + 4 - 4k - k$$

$$k^2 - 5k + 4$$

Por columna 2.

$$\det = \begin{vmatrix} k-1 & 8-2k \\ 1 & k-4 \end{vmatrix} = (k-1)(k-4) - (8-2k)$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= k^2 - 5k + 4 - 8 + 2k$$

$$0 = k^2 - 3k - 4$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot -4}}{2}$$

$$\boxed{k=4} \quad \vee \quad \boxed{k=-1}$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \rightarrow \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$$

$$\frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

Cuando el det es 0, k tiene que ser -1 o 4 .

Pruebo con ambos valores y veo si el sistema queda SCI o SI

$$\underline{K=-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3 \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & -6 \\ 0 & -2 & 10 & -6 \end{array} \right)$$

SISTEMA QUEDA SCI ULTIMAS DOS FILAS SON IGUALES

$$\underline{K=4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \cdot \frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$f_3 - f_2 \rightarrow f_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \text{INCOMPATIBLE}$$

Descarto $K=4$ Me queda con $K=-1$

~~Los K se eligen para el cual~~

Checkeo que $(1, K-1, -1)$ sea sol del sistema

$$(1, -2, -1) \checkmark$$

$$X_1 - X_2 + X_3 = 2$$

$$-2X_2 + 10X_3 = -6 \Rightarrow -X_2 + 5X_3 = -3$$

$$-X_2 = -3 - 5X_3$$

$$\boxed{X_2 = 3 + 5X_3}$$

$$X_1 - (3 + 5X_3) + X_3 = 2$$

$$X_1 - 3 - 5X_3 + X_3 = 2$$

$$X_1 - 4X_3 = 5$$

$$\boxed{X_1 = 5 + 4X_3}$$

$$(5 + 4X_3, 3 + 5X_3, X_3) \quad X_3 \in \mathbb{R}$$

$$\text{si } X_3 = -1 \Rightarrow (5 - 4, 3 - 5, -1) = \underline{(1, -2, -1)}$$

es una familia de soluciones
 y X_3 es un parámetro
 libre, en este
 caso $\underline{X_3 = -1}$

$$\text{Resp: } \boxed{K = -1} \quad \checkmark$$

$$(4) B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (-1, 1, 0)\}$$

$$B' = \{v, (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$$

Hallar v / $(v)_B = 101$ y calcular coordenadas de $235_{B'}$

$$(v)_B = (1, 0, 1)$$

$$(235)_{B'} = x$$

Busca v

$$1(1, 0, -1) + 0(0, 1, 0) + 1(-1, 1, 0) = v$$

$$(1, 0, -1) + (-1, 1, 0) = v$$

$$\underline{(0, 1, -1) = v} \quad \checkmark$$

$$B' = \{ \overset{v}{(0, 1, -1)}, (1, 0, 1), (1, 0, 0) \}$$

$$(235) = a(0, 1, -1) + b(1, 0, 1) + c(1, 0, 0)$$

$$(2, 3, 5) = (b+c, a, -a+b)$$

$$2 = b+c$$

$$2 = 8+c \quad \boxed{c = -6}$$

$$\boxed{3 = a}$$

$$5 = -a+b$$

$$5 = -3+b$$

$$5+3=b \quad \boxed{b=8}$$

$$(235)_{B'} = (3, 8, -6) \quad \checkmark$$

Prueba a ver si es correcta.

$$(2 \ 3 \ 5) = 3(0 \ 1 \ -1) + 8(1 \ 0 \ 1) - 6(1 \ 0 \ 0)$$

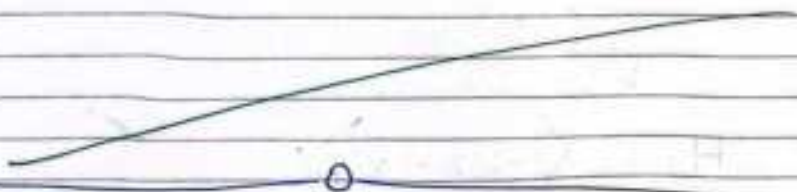
$$= (0 \ 3 \ -3) + (8 \ 0 \ 8) + (-6 \ 0 \ 0)$$

$$= (8-6, 3, -3+8)$$

$$(2 \ 3 \ 5) = (2, 3, 5) \checkmark \checkmark \Rightarrow (2 \ 3 \ 5)_{B'} = (3, 8, -6)$$

Resp: $V = (0 \ 1 \ -1)$

coordenadas de $(2, 3, 5)$ en la base B'
son $(3, 8, -6)$



③ $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$

$$H_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$$

$$S = \langle (2 \ -1 \ 0 \ 1), (1 \ 1 \ -1 \ 1) \rangle$$

Hallar $T \neq H_1$ / $T + (H_1 \cap H_2) = H_1$ y

$$T \subset H_1$$

$$T \cap S \neq \{0\}$$

Algun vector de $T \subset S$ y los otros no para $T \cap S \neq \{0\}$

Busco $H_1 \cap S$

$$H_1 \cap S =$$

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0$$

$$A \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = a(2 - 1 \ 0 \ 1) + b(1 \ 1 \ -1 \ 1)$$

$$S = (2a + b, -a + b, -b, a + b)$$

$$2a + b - (-b) + a + b = 0$$

$$2a + b + b + a + b$$

$$3a + 3b = 0$$

$$a + b = 0 \quad \boxed{a = -b}$$

$$H_1 \cap S = (-2b + b, -(-b) + b, -b, -b + b)$$

$$(-b, 2b, -b, 0)$$

$$b(-1, 2, -1, 0)$$

$$H_1 \cap S = \langle (-1 \ 2 \ -1 \ 0) \rangle$$

$\nabla (-1 \ 2 \ -1 \ 0)$ es un vector de T .

Busca dimensión de $H_1 \cap H_2$ y ∇ generadores.

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0 \quad x_1 = x_3 - x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_3 - x_4 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

$$2x_3 + x_2 + x_4 = 0$$

$$x_2 = -x_4 - 2x_3$$

$$(x_3 - x_4, -x_4 - 2x_3, x_3, x_4) = \dim[2]$$

$$x_3(1, -2, 1, 0) + x_4(-1, -1, 0, 1) \quad \dim = 2$$

$$\dim(\tau) + \dim(H_1 \cap H_2) - \dim(\tau \cap (H_1 \cup H_2)) = H_1$$

$$\boxed{2} + 2 - \boxed{1} = 3$$

$\dim(\tau) = 2$ (no puede ser 3 porque sin generación
no es H_1 y $\tau \neq H_1$)

$$\dim(\tau \cap (H_1 \cap H_2)) = 1 \rightarrow \forall v, v \in \text{base}$$

$$\tau = (\underbrace{v_1}_{S}, \underbrace{v_2}_{H_1 \cap H_2}) \quad v_1 \text{ y } v_2 \text{ son LI}$$

$$S = \langle (2, 1, 0, 1), (1, 1, -1, 1) \rangle$$

$$H_1 \cap H_2 = \langle (1, -2, 1, 0), (-1, -1, 0, 1) \rangle$$

Elip 1 de S y 1 de $H_1 \cap H_2$ y Ver si son LI

$$H_1 \cap H_2 \subset \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ son LI}$$

~~Base~~

$$\text{Base: } \tau = \langle (1, 1, -1, 1), (-1, -1, 0, 1) \rangle$$

$$T = \langle (1, -1, 1) (-1, -1, 0, 1) \rangle$$

Checkos que cumplen la propiedad.

$$T \neq H_1$$

$$(1, -1, 1) = 1 + 1 + 1 \neq 0 \quad V_1 \neq H_1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

~~F~~

$$T = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$$

Ambos en H_1 :

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ H_1 \cap S & H_1 \cap H_2 \end{matrix}$$

$$V_1 = (1, 2, -1, 0) = H_2 \cap S$$

$$V_2 = \text{Propriety } (-1, -1, 0, 1)$$

tienen que ser
L.I.

Ver nison L.I.

$$V_1 \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ son L.I.}$$

$$T = \langle (-1, 2, -1, 0) (-1, -1, 0, 1) \rangle$$

Checkea que cumplan la pedita.

$$\pi = \langle (-1 \ 2 \ -1 \ 0) \ (-1 \ -1 \ 0 \ 1) \rangle$$

$\pi \neq H_1$ no lo es porque sus dimensiones no son iguales.

$$T + (H_1 \cap H_2) = H_1$$

$$(-1 \ 2 \ 2 \ 0) \ (-1 \ -1 \ 0 \ 1) \ (-1 \ -2 \ -1 \ 0) \ (-2 \ -1 \ 0 \ 1) = H_1$$

$$(-1 \ 2 \ -1 \ 0) \ (-1 \ -1 \ 2 \ 1) \ (-2 \ -1 \ 0 \ 1)$$

$$\nRightarrow T + (H_1 \cap H_2) = H_1$$

$$\boxed{T} + \boxed{H_1, H_2} = H_1 \quad 3 \text{ vectores.}$$

$\underbrace{\quad}_{2 \text{ de } H_2}$
1 vector tiene que estar en común

$$H_1 = \underbrace{V_1}_{\text{de } H_1 \cap H_2} + \underbrace{V_2}_{\text{de } H_2} + H_1 \cap H_2 \quad \text{SON 2 vectores}$$

$H_1 \cap S \in H_1 \cap H_2$ que están en H_1 y N_α en S ni en H_2 .

en S pero no en H_2 . pero la intersección entre H_1 y S está en H_2 .

Para H_1 a generadores

$$X_1 - X_3 + X_4 = 0 \quad X_1 = X_3 - X_4$$

$$(X_3 - X_4, X_2, X_3, X_4)$$

$$H_1 = X_2(0, 1, 0, 0) + X_3(1, 0, 1, 0) + X_4(-1, 0, 0, 1)$$

Prueba si $(0, 1, 0, 0) \in aS$

$$(0, 1, 0, 0) = a(2, -1, 0, 1) + b(1, 1, -1, 1)$$

$$(0, 1, 0, 0) = (2a + b, -a + b, -b, a + b)$$

$$-b = 0 \quad | \quad b = 0$$

$$a \quad | \quad a = 0 \rightarrow \text{no se puede}$$

$$(0, 0, 0, 0) \neq (0, 1, 0, 0) \text{ ABSURDO}$$

NO PERTENECE $(0, 1, 0, 0) \notin S$

Prueba si $(0, 1, 0, 0) \in H_2$

$$0 + 1 + 0 + 0 \neq 0 \text{ ABSURDO}$$

NO PERTENECE $(0, 1, 0, 0) \notin H_2$

Propagación

$$T = \langle \underbrace{(0, 1, 0, 0)}_{\in H_1} \underbrace{(-1, 2, -1, 0)}_{\in S, \notin H_1, \notin H_2} \rangle$$

Checkar que cumplamos la propiedad

$T \neq H_1$ porque T no tiene dimensión
son diferentes

$$\dim(T) = 1$$

$$\dim(W) = 3$$

$$T + (H_1 \cap H_2) = H_1$$

ES LO MISMO AL SEGUNDO VECTOR

$$(0, 1, 0, 0) + (-1, 2, -1, 0) + (1, -2, 1, 0) + (-1, -1, 0, 1) = H_1$$

$$H_1 \cap H_2$$

$$\{ (0,1,0,0), (-1,2,-1,0), (-1,-1,0,1) \} \subset H_1$$

Checkeo que los tres están en H_1 y sean LI

$$H_1 = X_1 - X_3 + X_4 = 0$$

$$(0,1,0,0) = 0 - 0 + 0 = 0 \checkmark$$

$$(-1,2,-1,0) = -1 + 1 + 0 = 0 \checkmark$$

$$(-1,-1,0,1) = -1 + 0 + 1 = 0 \checkmark$$

Como los tres vectores pertenecen a H_1 y tienen la misma dimensión

~~se~~ $\rightarrow$ genera toda H_1 .

$$T \cap S \neq \{0\} \checkmark$$

$$a(0,1,0,0) + b(-1,2,-1,0) = c(2,-1,0,1) + d(1,1,-1,1)$$

$$(-b, a+2b, -b, 0) = (2c+d, -c+b, -d, c+d)$$

$$\begin{aligned} -b &= 2c+d \\ a+2b &= -c+d \end{aligned}$$

$$-d = 2 - d + d$$

$$-d = -2 + d$$

$$-d = -d \checkmark$$

$$\begin{aligned} -d &= -b & b &= d \\ c+d &= 0 & c &= -d \end{aligned}$$

$$a+2d = -d(-d)+d$$

$$a+2d = d+d$$

$$a+2d = 2d$$

No sale un absurdo
Por lo tanto existe

$a=0$ la intersección

Y previamente había probado que
 $(-1,2,-1,0)$ está en S cuando se que

$$H_1 \cap S \checkmark$$

Por lo tanto

una: $T = \langle (0, 1, 0, 0)(-1, 2, -1, 0) \rangle$ porque cumple
con todas las
condiciones.