ANÁLISIS MATEMÁTICO II (284)

Cátedra: María José Bianco

Sede: Paternal

RESOLUCIÓN

2º PARCIAL

TEMA 1

EJERCICIO 1

a) Sea la función $z = f(x, y)$ y el punto (x_0, y_0) un punto crítico de una función. Halle el desarrollo de Taylor en el entorno del punto crítico hasta las derivadas segundas inclusive y demostrar que la condición suficiente para que (x_0, y_0) sea un MÍNIMO RELATIVO es que el diferencial segundo de la función evaluado en el punto sea POSITIVO.

Condición suficiente de extremo relativo

Si $(x_0; y_0)$ es un punto crítico y se cumple que:

$d^2 f(x_0; y_0) < 0 \ \forall (x; y) \in E^*(x_0; y_0) \rightarrow f(x_0; y_0)$ *es un **máximo relativo** de f.*

$d^2 f(x_0; y_0) > 0 \ \forall (x; y) \in E^*(x_0; y_0) \rightarrow f(x_0; y_0)$ *es un **mínimo relativo** de f.*

$d^2 f(x_0; y_0) = 0 \ \forall (x; y) \in E(x_0; y_0)$ *se tiene un **caso dudoso** puede existir un máximo, un mínimo o no existir extremos.*

Demostración

Aproximando el valor de la función en un entorno $(x_0; y_0)$ mediante el Polinomio de Taylor de orden 2 se tiene

$$f(x; y) \cong f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)dx + f'_y(x_0; y_0)dy + \frac{f''_{xx}(x_0; y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0; y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0; y_0)dy^2}{2!}$$

Como el análisis se realiza en el punto crítico: $f'_x(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) = 0$

$$f(x; y) - f(x_0; y_0) \cong \frac{f''_{xx}(x_0; y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0; y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0; y_0)dy^2}{2!} = \frac{1}{2} d^2 f(x_0; y_0)$$

Con lo cual analizar el $f(x; y) - f(x_0; y_0)$ es aproximadamente igual que analizar el signo del $d^2 f(x_0; y_0)$.

EJERCICIO 1

b) Dada la siguiente función: $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + ay^2 + xy$

Determinar todos los puntos críticos en función del parámetro a y, mediante la condición de suficiencia indicar si los puntos críticos encontrados son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura.

Condición necesaria

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 0 \Rightarrow x^2 + y = 0 \\ f'_y = 0 \Rightarrow 2ay + x = 0 \end{array}\right\} \qquad Puntos\ críticos: \qquad P_{C1} = (0,0) \qquad P_{C2} = \left(\frac{1}{2a}, \frac{-1}{4a^2}\right)$$

Condición suficiente

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix} \Rightarrow |H(x,y| = 4xa - 2$$

$$H(0,0) = -1 < 0 \Rightarrow En\ el\ punto\ (0,0)\ la\ función\ presenta\ un\ punto\ de\ ensilladura$$

$$H\left(\frac{1}{2a}, \frac{-1}{2a}\right) = 1 > 0 \Rightarrow En\ el\ punto\ \left(\frac{1}{2a}, \frac{-1}{4a^2}\right)\ la\ función\ presenta\ un\ extremo\ relativo\ en\ el\ punto P_{C2}.$$

$Como f''_{xx}\left(\frac{1}{2a}, \frac{-1}{2a}\right) = 1/a$: Cuando $a > 0$ la función presenta un **mínimo relativo** en el punto P_{C2}

Cuando $a < 0$ la función presenta un **máximo relativo** en el punto P_{C2}

EJERCICIO 2

Dada la siguiente función de producción $P(K, L) = K^{\alpha}L$ donde K representa las unidades de capital y L de trabajo; y dados los siguientes precios de los insumos $p_K = 1$ y $p_L = 2$ y dispone de un capital de 700 para invertir en los insumos capital y trabajo y $\alpha > 0$.

a) En caso de existir, hallar el/ los puntos críticos que maximizan la producción bajo la restricción de capital dado.

$$L(K, L, \lambda) = K^{\alpha}L + \lambda(700 - K - 2L)$$

$$\left.\begin{array}{l} L'_K = \alpha K^{(\alpha-1)}L - \lambda = 0 \\ L'_L = K^{\alpha} - 2\lambda = 0 \\ L'_\lambda = 700 - K - 2L = 0 \end{array}\right\}$$

Punto crítico: $(K, L) = \left(\frac{700\alpha}{\alpha+1}, \frac{350}{\alpha+1}\right)$

EJERCICIO 2

Dada la siguiente función de producción $P(K,L) = K^{\alpha}L$ donde K representa las unidades de capital y L de trabajo; y dados los siguientes precios de los insumos $p_K = 1$ y $p_L = 2$ y dispone de un capital de 700 para invertir en los insumos capital y trabajo y $\alpha > 0$.

b) Armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por los puntos críticos encontrados en el punto a y concluir en qué condiciones de α se encuentra un máximo condicionado

Punto crítico: $(K^{*}, L^{*}) = \left(\frac{700\alpha}{\alpha+1}, \frac{350}{\alpha+1}\right)$

Matriz hessiana orlada

$$\overline{H}(K,L) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L & \alpha K^{\alpha-1} \\ 2 & \alpha K^{\alpha-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overline{H}\left(\frac{700\alpha}{\alpha+1}, \frac{350}{\alpha+1}\right)\right| = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha\left(\frac{700\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha-1} & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha(\alpha-1)\left(\frac{700\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha-2} * \left(\frac{350}{\alpha+1}\right) & \alpha\left(\frac{700\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha-1} \end{vmatrix}$$

$$\left|\overline{H}\left(\frac{700\alpha}{\alpha+1}, \frac{350}{\alpha+1}\right)\right| = \underbrace{2\alpha\left(\frac{700\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha-1}}_{\text{Positivo para cualquier valor de } \alpha>0} + 2\left[\underbrace{\alpha\left(\frac{700\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha-1}}_{\text{Positivo para cualquier valor de } \alpha>0} \underbrace{- 2\alpha(\alpha-1)\left(\frac{700\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha-2} * \left(\frac{350}{\alpha+1}\right)}_{\text{Positivo para cualquier valor de } \mathbf{0<\alpha<1}}\right]$$

EJERCICIO 3

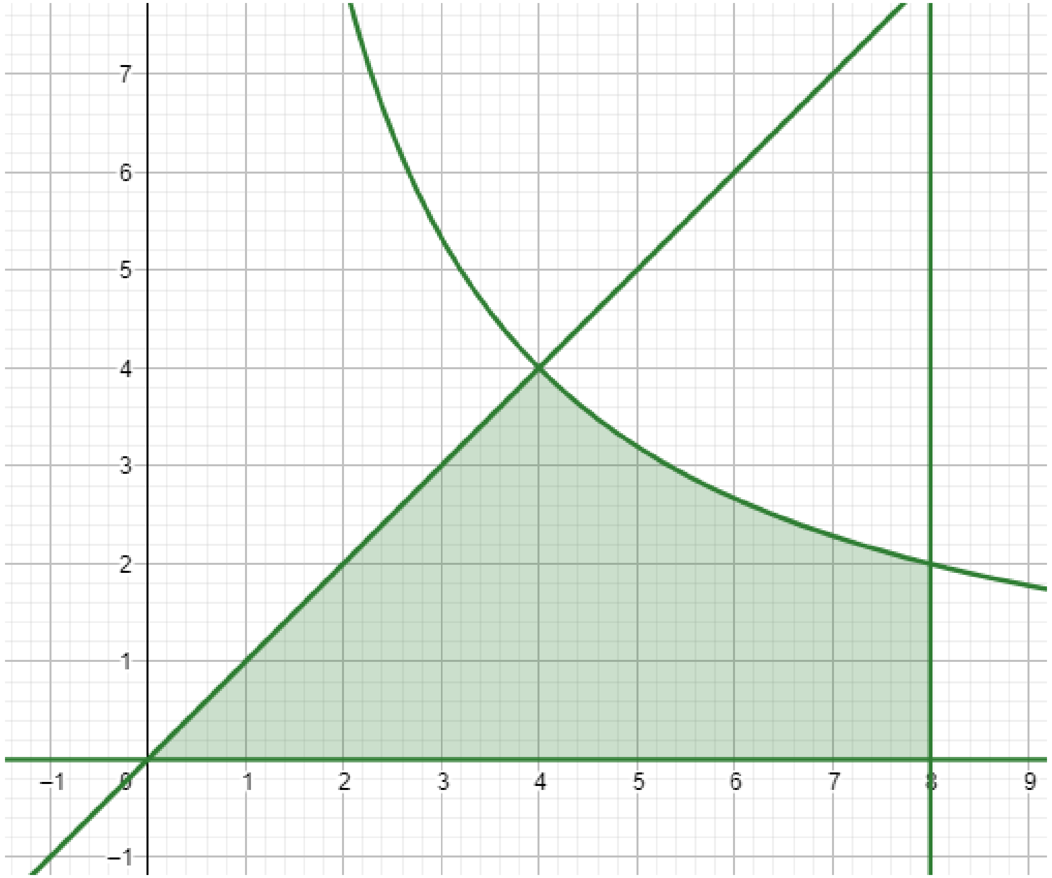
Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

$$V = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy \qquad\qquad R = Región\ encerrada\ por:\ xy = 16\ ,\ x = y,\ y = 0, x = 8$$

a) Graficar el recinto de integración dado.

b) <u>PLANTEAR</u> (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable x y luego por la variable y: $V = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$.

c) <u>PLANTEAR</u> (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable y luego por la variable x: $V = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$



EJERCICIO 3

Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

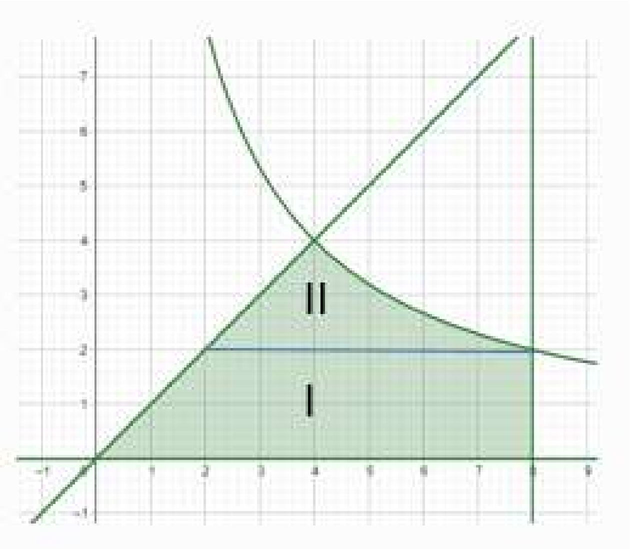
$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad\qquad R = Región\ encerrada\ por:\ xy = 16\,,\ x = y,\ y = 0, x = 8$$

a) Graficar el recinto de integración dado.

b) <u>PLANTEAR</u> (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable x y luego por la variable y: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

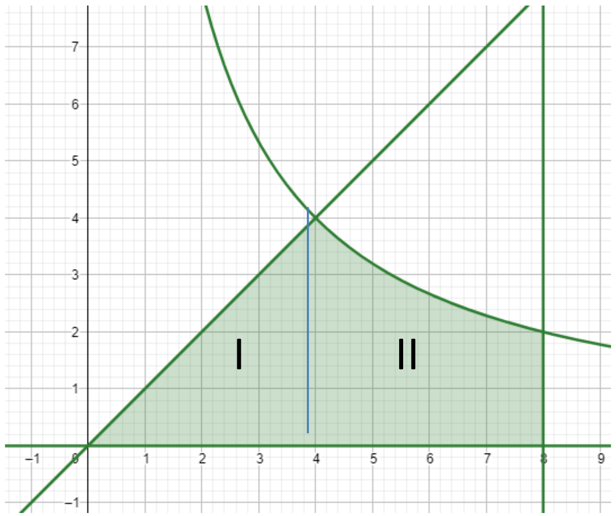
c) <u>PLANTEAR</u> (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable y luego por la variable x: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

b) Integrar primero por x y luego por y: se debe particionar el recinto:



$$\int_0^2 \left[\int_y^8 f(x,y)dx\right] dy + \int_2^4 \left[\int_y^{16/y} f(x,y)dx\right] dy$$

c) Integrar primero por y y luego por x: se debe particionar el recinto:



$$\int_0^4 \left[\int_0^x f(x,y)dy\right] dx + \int_4^8 \left[\int_0^{16/x} f(x,y)dy\right] dx$$

EJERCICIO 4

Clasificar la siguiente EDO, justificando la respuesta: $(x^2+y^2)dx + xy\,dy = 0$. Hallar la solución general.

$$(x^2+y^2)dx + xy\,dy = 0$$

$P(x,y) = x^2 + y^2$ $\rightarrow$ Homogénea n=2
$Q(x,y) = xy$ $\rightarrow$ Homogénea n=2

EDO 1 Homogénea.

$$\frac{(x^2+y^2)}{x^2}dx + \frac{xy}{x^2}\,dy = 0$$

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{y}{x}\,dy = 0$$

$v = y/x$ $\qquad$ $y = vx$ $\qquad$ $dy = vdx + xdv$

$$(1+v^2)dx + v\,(vdx + xdv) = 0$$
$$(1+v^2+v^2)dx + vx\,dv = 0$$
$$(1+2v^2)dx = -vx\,dv$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int -\frac{v}{(1+2v^2)}\,dv$$

$$lnx.C = -\int \frac{v}{(1+2v^2)}\,dv \qquad 1+2v^2 = t \qquad \mathrm{dt} = 4vdv \qquad \frac{\mathrm{dt}}{4} = vdv$$

$$lnx.C = -\frac{1}{4}\ln(1+2v^2)$$

$$lnx.C = \ln(1+2v^2)^{-1/4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x.C} = \left(\mathbf{1} + \mathbf{2}\frac{\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{x}}\right)^{-\mathbf{1/4}}}$$

SG

$$(x^2+y^2)dx + xy\,dy = 0$$

$P(x,y) = x^2 + y^2 \rightarrow \qquad P'_y = 2y$

$Q(x,y) = xy \qquad \rightarrow \qquad Q'_x = y$

F. Integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2y-y}{xy}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$P_1(x,y) = x^3 + xy^2 \qquad \rightarrow \qquad P'_{1y} = 2yx$

$Q_1(x,y) = x^2y \qquad \rightarrow \qquad Q'_{1x} = 2xy$

Ahora es exacta

$$\int (x^3 + xy^2)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}$$

$$\int (x^2y)dy = \frac{x^2y^2}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4}}}$$

EJERCICIO 5

Dada la siguiente ecuación diferencial: $y'' - 2y' - 3x = 0$

a) Hallar la solución general.
b) Hallar la solución particular si $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

a) $y'' - 2y' - 3x = 0$

$\boldsymbol{y_h}$ $\quad y'' - 2y' = 0$

$$r^2 - 2r = 0$$
$$r\,(r-2) = 0 \qquad r_1 = 0 \qquad r_2 = 2$$

$$y_h = C_1 + C_2\, e^{2x}$$

$\boldsymbol{y_c}$ $\quad g(x) = 3x$

$$y_c = Ax^2 + Bx$$
$$y'_c = 2Ax + B$$
$$y''_c = 2A$$

$$(2A) - 2(2Ax + B) = 3x$$
$$(2A - 2B) - 4Ax = 3x \qquad \rightarrow A = -3/4 \qquad B = -3/4$$

$$y_c = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_{SG} = C_1 + C_2\, e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x}}$$

$$y(0) = 0$$

$$0 = C_1 + C_2$$
$$C_1 = -C_2$$

$$y´(0) = 1$$

$$y'_{SG} = 2C_2\, e^{2x} - \frac{3}{2}x \quad - \frac{3}{4}$$
$$1 = 2C_2 \ - \frac{3}{4}$$
$$C_2 = 7/8 \qquad\qquad C_1 = -7/8$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_{SP} = -7/8 + 7/8\, e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x}}$$

RESOLUCIÓN

2º PARCIAL

TEMA 2

EJERCICIO 1

a) Sea la función $z = f(x,y)$ y el punto (x_0, y_0) un punto crítico de la función. Hallar el desarrollo de Taylor en el entorno del punto crítico hasta las derivadas segundas inclusive y demostrar que la condición suficiente para que (x_0, y_0) sea un MAXIMO RELATIVO es que el diferencial segundo de la función evaluado en el punto sea NEGATIVO.

Condición suficiente de extremo relativo

Si $(x_0; y_0)$ es un punto crítico y se cumple que:

$d^2 f(x_0; y_0) < 0\ \forall (x;y) \in E^*(x_0; y_0) \rightarrow f(x_0; y_0)$ *es un **máximo relativo** de f.*

$d^2 f(x_0; y_0) > 0\ \forall (x;y) \in E^*(x_0; y_0) \rightarrow f(x_0; y_0)$ *es un **mínimo relativo** de f.*

$d^2 f(x_0; y_0) = 0\ \forall (x;y) \in E(x_0; y_0)$ *se tiene un **caso dudoso** puede existir un máximo, un mínimo o no existir extremos.*

Demostración

Aproximando el valor de la función en un entorno $(x_0; y_0)$ mediante el Polinomio de Taylor de orden 2 se tiene

$$f(x;y) \cong f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)dx + f'_y(x_0;y_0)dy + \frac{f''_{xx}(x_0;y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0;y_0)dy^2}{2!}$$

Como el análisis se realiza en el punto crítico: $f'_x(x_0;y_0) = f'_y(x_0;y_0) = 0$

$$f(x;y) - f(x_0;y_0) \cong \frac{f''_{xx}(x_0;y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0;y_0)dy^2}{2!} = \frac{1}{2}d^2 f(x_0;y_0)$$

Con lo cual analizar el $f(x;y) - f(x_0;y_0)$ es aproximadamente igual que analizar el signo del $d^2 f(x_0;y_0)$.

EJERCICIO 1

b) Dada la función: $f(x,y) = xy + \frac{y^3}{3} + bx^2 + 20$

Determinar todos los puntos críticos en función del parámetro b y, mediante la condición de suficiencia indicar, para que valores de b, los puntos críticos encontrados son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura.

Condición necesaria

$$\left.\begin{array}{c} f'_x = 0 \Rightarrow y + 2bx = 0 \\ f'_y = 0 \Rightarrow y^2 + x = 0 \end{array}\right\} \qquad Puntos\ críticos: \qquad P_{C1} = (0,0) \qquad P_{C2} = \left(\frac{-1}{4b^2}, \frac{1}{2b}\right)$$

Condición suficiente

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2b & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow |H(x,y)| = 4by - 1$$

$$H(0,0) = -1 < 0 \Rightarrow En\ el\ punto\ (0,0)\ la\ función\ presenta\ un\ punto\ de\ ensilladura$$

$$H\left(\frac{-1}{4b^2}, \frac{1}{2b}\right) = 1 > 0 \Rightarrow En\ el\ punto\ \left(\frac{-1}{4b^2}, \frac{1}{2b}\right)\ la\ función\ presenta\ un\ extremo\ relativo\ en\ el\ punto P_{C2}.$$

$Como f''_{xx}\left(\frac{-1}{4b^2}, \frac{1}{2b}\right) = 2b$: Cuando b > 0 la función presenta un **mínimo relativo** en el punto P_{C2}

Cuando b < 0 la función presenta un **máximo relativo** en el punto P_{C2}

EJERCICIO 2

Dada la siguiente función de utilidad $U(x_1, x_2) = 40x_1^{\alpha}x_2$ donde x_1 representa las unidades del bien 1 y x_2 las del bien 2; siendo $\alpha > 0$; y donde los precios son (respectivamente): $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$. Se dispone de un ingreso de 900 para invertir en ambos bienes.
a) En caso de existir, hallar el/ los puntos críticos que maximizan la utilidad bajo la restricción de ingreso dada.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 40x_1^{\alpha}x_2 + \lambda(900 - x_1 - 2x_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} L'_{x_1} = 40\alpha x_1^{\alpha-1}x_2 - \lambda = 0 \\ L'_{x_2} = 40x_1^{\alpha} - 2\lambda = 0 \\ L'_{\lambda} = 900 - x_1 - 2x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$P_c = (x_{1c}, x_{2c})\left(\frac{450}{\alpha+1}, \frac{900\alpha}{\alpha+1}\right)$$

EJERCICIO 2

Dada la siguiente función de utilidad $U(x_1, x_2) = 40x_1^{\alpha}x_2$ donde x_1 representa las unidades del bien 1 y x_2 las del bien 2; siendo $\alpha > 0$; y donde los precios son (respectivamente): $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$. Se dispone de un ingreso de 900 para invertir en ambos bienes.

b) Armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por los puntos críticos y concluir en qué condiciones de α se encuentra un máximo condicionado.

Matriz Hessiana Orlada

$$\overline{H}(x_{1c}, x_{2c}, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 40\alpha(\alpha-1)x_{1c}^{\alpha-2}x_{2c} & 40\alpha x_{1c}^{\alpha-1} \\ 2 & 40\alpha x_{1c}^{\alpha-1} & 0 \end{pmatrix}$$

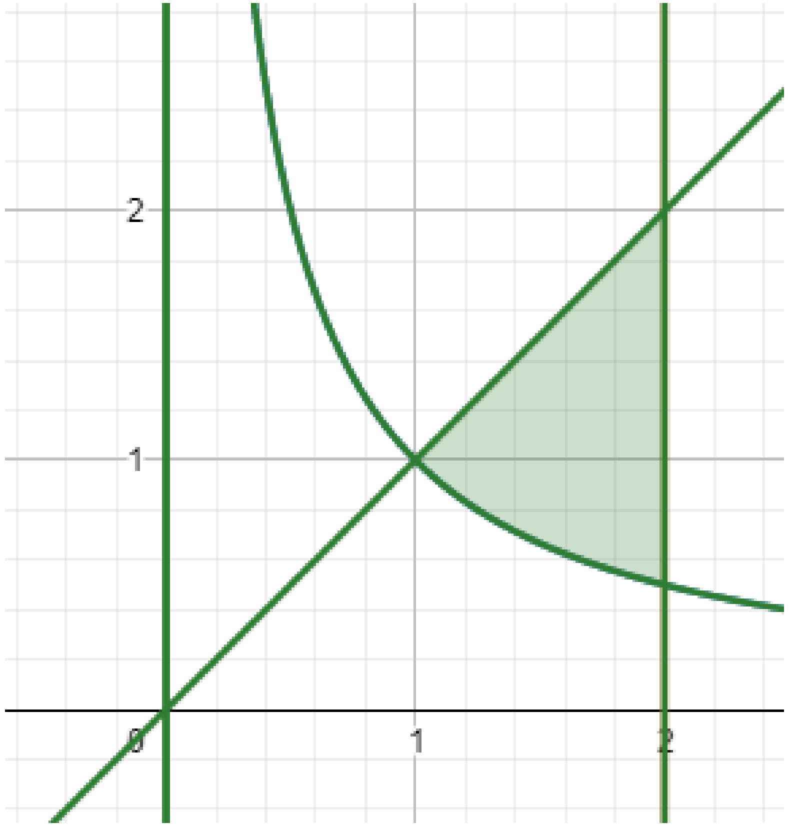
$$\left|\overline{H(x_{1c}, x_{2c}, \lambda)}\right| = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 40\alpha x_{1c}^{\alpha-1} & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 40\alpha(\alpha-1)x_{1c}^{\alpha-2}x_{2c} & 40\alpha x_{1c}^{\alpha-1} \end{vmatrix} = \underbrace{-1[-80\alpha x_{1c}^{\alpha-1}]}_{\text{Positivo para cualquier valor de } \alpha > 0} + \underbrace{2[40\alpha x_{1c}^{\alpha-1} - 80\alpha(\alpha-1)x_{1c}^{\alpha-2}x_{2c}]}_{\text{Positivo para cualquier valor de } \mathbf{0 < \alpha < 1}}$$

EJERCICIO 3

Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad\qquad R = Región\ encerrada\ por:\ x = y,\ y = \frac{1}{x}, x = 1,\ \ x = 2$$

a) Graficar el recinto de integración dado.



EJERCICIO 3

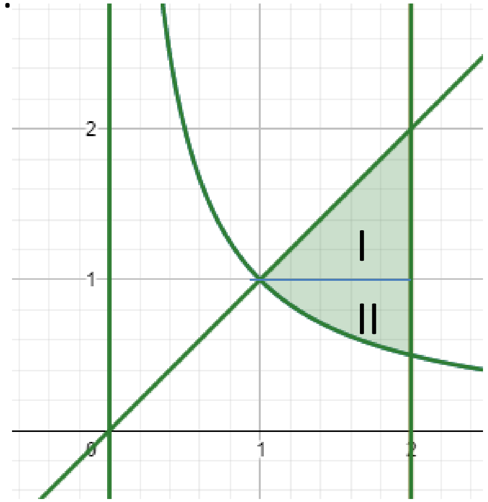
Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad\qquad R = Región\ encerrada\ por:\ x = y,\ y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2$$

b) PLANTEAR (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable x y luego por la variable y: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

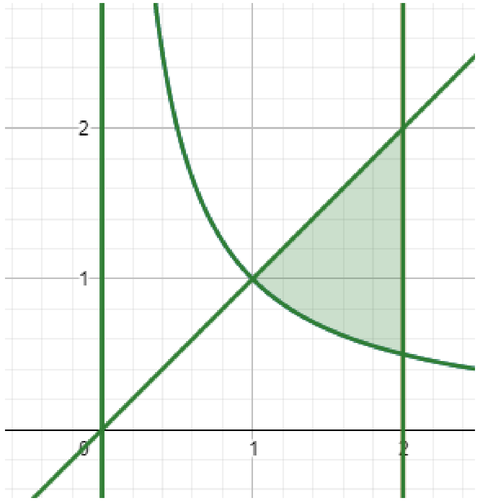
c) PLANTEAR (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable y luego por la variable x: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

b) Integrar primero por x y luego por y: se debe particionar el recinto:



$$\int_1^2 \left[\int_y^2 f(x,y)dx\right] dy + \int_{1/2}^1 \left[\int_{1/y}^2 f(x,y)dx\right] dy$$

c) Integrar primero por y y luego por x



$$\int_1^2 \left[\int_{1/x}^x f(x,y)dy\right] dx$$

EJERCICIO 4

Clasificar la siguiente EDO, justificando la respuesta: $2xy^3 + 3x^2y^2\ \frac{dy}{dx} = 0$. Hallar la solución general.

$$(2xy^3)dx + (3x^2y^2)dy = 0$$

$P(x, y) = 2xy^3$ $\rightarrow$ Homogénea n=4
$Q(x, y) = 3x^2y^2$ $\rightarrow$ Homogénea n=4
EDO 1 Homogénea.

$P'_y = 6xy^2$ $\qquad$ $P'_y = Q'_x \rightarrow$ **Exacta**
$Q'_x = 6xy^2$

$(2xy^3)dx = -(3x^2y^2)dy$

$$\frac{2x}{x^2}dx = \frac{-3y^2}{y^3}dy$$

V. Separables

Resuelvo por exacta:

$$\int (2xy^3)dx = x^2y^3$$

$$\int (3x^2y^2)dy = x^2y^3$$

$$\boxed{\boldsymbol{C = x^2y^3}}$$

EJERCICIO 5

Dada la siguiente ecuación diferencial: $y'' - y' = 2x^2 + 6$

a) Hallar la solución general.

b) Hallar la solución particular si $y(0) = 0$ e $y´(0)$ =2

a) $y'' - y' = 2x^2 + 6$

$\boldsymbol{y_h}$ $\quad y'' - y' = 0$

$r^2 - r = 0$

$r\,(r - 1) = 0 \qquad r_1 = 0 \qquad r_2 = 1$

$y_h = C_1 + C_2\, e^x$

$\boldsymbol{y_c}$ $\quad g(x) = 2x^2 + 6$

$y_c = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

$y'_c = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y''_c = 6Ax + 2B$

$(6Ax + 2B\,) - (3Ax^2 + 2Bx + C) = 2x^2 + 6$

$-3\mathrm{A}x^2 + (6A - 2B)x + (2B - C) = 2x^2 + 6$

$\rightarrow A = -2/3 \qquad B = -2 \qquad C = -10$

$$y_c = -\frac{2}{3}\, x^3 - 2x^2 - 10x$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_{SG} = C_1 + C_2\, e^x - \frac{2}{3}\, x^3 - 2x^2 - 10x}}$$

$y(0) = 0$

$$0 = C_1 + C_2$$
$$C_1 = -C_2$$

$y´(0) = 2$

$$y'_{SG} = C_2\, e^{x} - 2x^2 - 4x - 10$$
$$2 = C_2 \ - 10$$
$$C_2 = 12 \qquad\qquad C_1 = -12$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_{SP} = -12 + 12\, e^{x} - \frac{2}{3}\, x^3 - 2x^2 - 10x}}$$

RESOLUCIÓN

2º PARCIAL

TEMA 3

EJERCICIO 1

a) Sea la función $z = f(x, y)$ y el punto (x_0, y_0) un punto crítico de la función. Hallar el desarrollo de Taylor en el entorno del punto crítico hasta las derivadas segundas inclusive y <u>demostrar</u> que la condición suficiente para que (x_0, y_0) sea un MÍNIMO RELATIVO es que el diferencial segundo de la función evaluado en el punto sea POSITIVO.

Condición suficiente de extremo relativo

Si $(x_0; y_0)$ es un punto crítico y se cumple que:

$d^2 f(x_0; y_0) < 0 \ \forall (x; y) \in E^*(x_0; y_0) \rightarrow f(x_0; y_0)$ *es un **máximo relativo** de f.*

$d^2 f(x_0; y_0) > 0 \ \forall (x; y) \in E^*(x_0; y_0) \rightarrow f(x_0; y_0)$ *es un **mínimo relativo** de f.*

$d^2 f(x_0; y_0) = 0 \ \forall (x; y) \in E(x_0; y_0)$ *se tiene un **caso dudoso** puede existir un máximo, un mínimo o no existir extremos.*

Demostración

Aproximando el valor de la función en un entorno $(x_0; y_0)$ mediante el Polinomio de Taylor de orden 2 se tiene

$$f(x; y) \cong f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)dx + f'_y(x_0; y_0)dy + \frac{f''_{xx}(x_0; y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0; y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0; y_0)dy^2}{2!}$$

Como el análisis se realiza en el punto crítico: $f'_x(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) = 0$

$$f(x; y) - f(x_0; y_0) \cong \frac{f''_{xx}(x_0; y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0; y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0; y_0)dy^2}{2!} = \frac{1}{2} d^2 f(x_0; y_0)$$

Con lo cual analizar el $f(x; y) - f(x_0; y_0)$ es aproximadamente igual que analizar el signo del $d^2 f(x_0; y_0)$.

EJERCICIO 1

b) Dada la siguiente función: $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + ay^2 + xy$

Determinar todos los puntos críticos en función del parámetro a y, mediante la condición de suficiencia indicar si los puntos críticos encontrados son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de ensilladura.

Condición necesaria

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 0 \Rightarrow x^2 + y = 0 \\ f'_y = 0 \Rightarrow 2ay + x = 0 \end{array}\right\} \qquad Puntos\ críticos: \qquad P_{C1} = (0,0) \qquad P_{C2} = \left(\frac{1}{2a}, \frac{-1}{4a^2}\right)$$

Condición suficiente

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix} \Rightarrow |H(x,y| = 4xa - 2$$

$$H(0,0) = -1 < 0 \Rightarrow En\ el\ punto\ (0,0)\ la\ función\ presenta\ un\ punto\ de\ ensilladura$$

$$H\left(\frac{1}{2a}, \frac{-1}{2a}\right) = 1 > 0 \Rightarrow En\ el\ punto\ \left(\frac{1}{2a}, \frac{-1}{4a^2}\right)\ la\ función\ presenta\ un\ extremo\ relativo\ en\ el\ punto P_{C2}.$$

$Como f''_{xx}\left(\frac{1}{2a}, \frac{-1}{2a}\right) = 1/a$: Cuando $a > 0$ la función presenta un **mínimo relativo** en el punto P_{C2}

Cuando $a < 0$ la función presenta un **máximo relativo** en el punto P_{C2}

EJERCICIO 2

Dada la siguiente función de utilidad $U(x_1, x_2) = 40x_1^{\alpha}x_2$ donde x_1 representa las unidades del bien 1 y x_2 las del bien 2; siendo $\alpha > 0$; y donde los precios son (respectivamente): $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$. Se dispone de un ingreso de 900 para invertir en ambos bienes.
a) En caso de existir, hallar el/ los puntos críticos que maximizan la utilidad bajo la restricción de ingreso dada.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 40x_1^{\alpha}x_2 + \lambda(900 - x_1 - 2x_2)$$

$$\left.\begin{aligned} L'_{x_1} &= 40\alpha x_1^{\alpha-1}x_2 - \lambda = 0 \\ L'_{x_2} &= 40x_1^{\alpha} - 2\lambda = 0 \\ L'_{\lambda} &= 900 - x_1 - 2x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$P_c = (x_{1c}, x_{2c})\left(\frac{450}{\alpha+1}, \frac{900\alpha}{\alpha+1}\right)$$

EJERCICIO 2

Dada la siguiente función de utilidad $U(x_1, x_2) = 40x_1^{\alpha}x_2$ donde x_1 representa las unidades del bien 1 y x_2 las del bien 2; siendo $\alpha > 0$; y donde los precios son (respectivamente): $p_1 = 1$ y $p_2 = 2$. Se dispone de un ingreso de 900 para invertir en ambos bienes.

b) Armar la matriz hessiana orlada, reemplazar por los puntos críticos y concluir en qué condiciones de α se encuentra un máximo condicionado.

Matriz Hessiana Orlada

$$\overline{H}(x_{1c}, x_{2c}, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 40\alpha(\alpha-1)x_{1c}^{\alpha-2}x_{2c} & 40\alpha x_{1c}^{\alpha-1} \\ 2 & 40\alpha x_{1c}^{\alpha-1} & 0 \end{pmatrix}$$

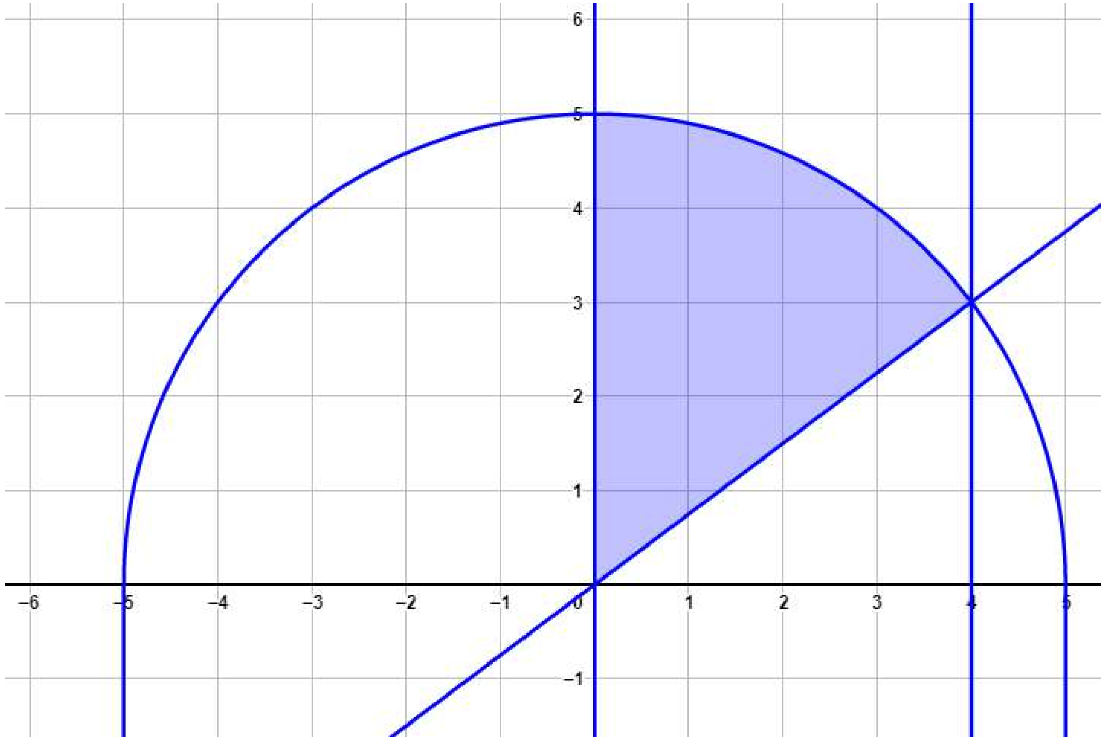
$$\left|\overline{H(x_{1c}, x_{2c}, \lambda)}\right| = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 40\alpha x_{1c}^{\alpha-1} & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 40\alpha(\alpha-1)x_{1c}^{\alpha-2}x_{2c} & 40\alpha x_{1c}^{\alpha-1} \end{vmatrix} = \underbrace{-1[-80\alpha x_{1c}^{\alpha-1}]}_{\text{Positivo para cualquier valor de } \alpha > 0} + \underbrace{2[40\alpha x_{1c}^{\alpha-1} - 80\alpha(\alpha-1)x_{1c}^{\alpha-2}x_{2c}]}_{\text{Positivo para cualquier valor de } \mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{1}}$$

EJERCICIO 3

Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

$$V = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy \qquad R = Región\ encerrada\ por\text{:}\ 0 \leq x \leq 4 \qquad \frac{3}{4}x \leq y \leq +\sqrt{25 - x^2}$$

a) Graficar el recinto de integración dado.



EJERCICIO 3

Dada la siguiente integral doble y su correspondiente recinto de integración:

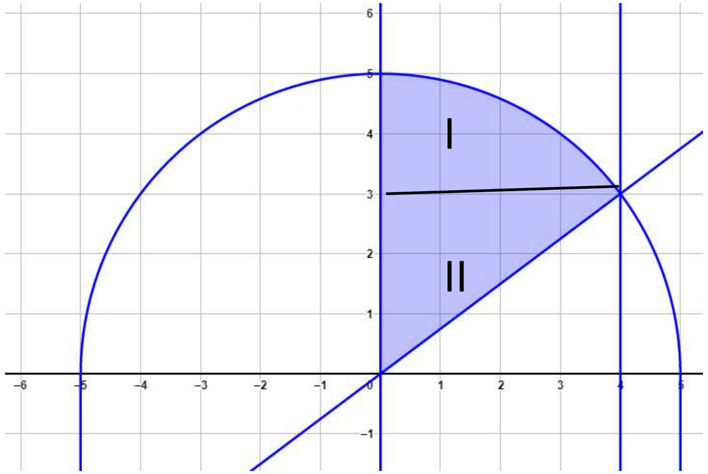
$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad\qquad R = Región\ encerrada\ por:\ 0 \le x \le 4\ e\ \frac{3}{4}x \le y \le +\sqrt{25-x^2}$$

a) Graficar el recinto de integración dado.

b) <u>PLANTEAR</u> (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable x y luego por la variable y: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

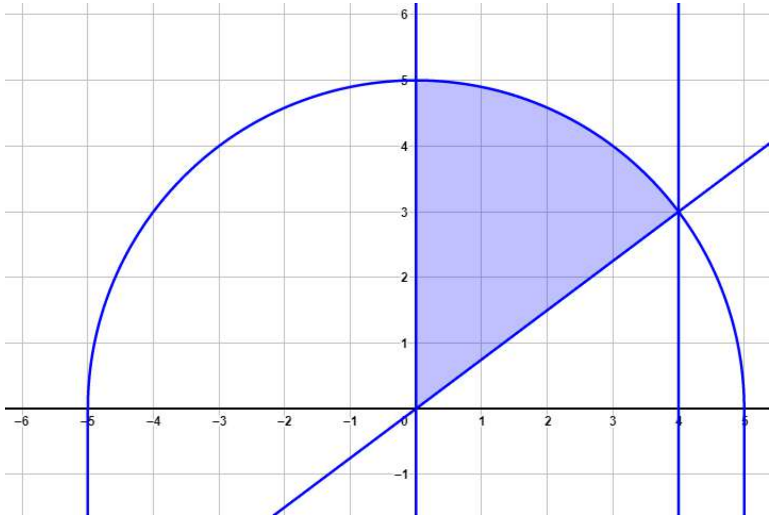
c) <u>PLANTEAR</u> (no se debe resolver la integral) la integral doble si se integra primero por la variable y luego por la variable x: $V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

b) Integrar primero por x y luego por y: se debe particionar
el recinto:



$$\int_0^3 \left[\int_0^{\frac{4}{3}y} f(x,y)dx\right] dy + \int_3^5 \left[\int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx\right] dy$$

c) Integrar primero por y y luego por x



$$\int_0^4 \left[\int_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy\right] dx$$

EJERCICIO 4

Clasificar la siguiente EDO, justificando la respuesta: $y' = e^{2x} + y - 1$. Hallar la solución general.

$$y' - y = e^{2x} - 1$$

EDO 1 Lineal.

$$u'v + v'u - uv = e^{2x} - 1$$
$$(u' - u)v + v'u = e^{2x} - 1$$

$$u' - u = 0$$
$$\frac{du}{dx} = u$$
$$\int \frac{du}{u} = \int dx$$
$$\ln u = x$$
$$u = e^x$$

$$v'u = e^{2x} - 1$$
$$v'e^x = e^{2x} - 1$$
$$\int dv = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx$$
$$v = \int e^x\,dx - \int e^{-x}\,dx$$
$$v = e^x + e^{-x} + C$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = e^x[e^x + e^{-x} + C\,]}}$$

EJERCICIO 5

Dada la siguiente ecuación diferencial: $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$

a) Hallar la solución general.

b) Hallar la solución particular si $y(0) = 0$ e $y´(0)$ =5

a): $y'' - 2y' = e^{2x}$

$\boldsymbol{y_h}$ $\quad y'' - 2y' = 0$

$r^2 - 2r = 0$

$r\,(r-2) = 0 \qquad r_1 = 0 \qquad r_2 = 2$

$y_h = C_1 + C_2\, e^{2x}$

$\boldsymbol{y_c}$ $\quad g(x) = e^{2x}$

$y_c = Axe^{2x}$

$y'_c = Ae^{2x} + \mathrm{A2x}e^{2x}$

$y''_c = A2e^{2x} + A2e^{2x} + A4xe^{2x}$

$(A4e^{2x} + A4xe^{2x}) - 2(Ae^{2x} + \mathrm{A2x}e^{2x}) = e^{2x}$

$(4\mathrm{A} - 2\mathrm{A})e^{2x} + (4\mathrm{Ax} - 4\mathrm{Ax})e^{2x} = e^{2x}$

$\rightarrow A = 1/2$

$y_c = 1/2xe^{2x}$

$$\boxed{\boldsymbol{y_{SG} = C_1 + C_2\, e^{2x} + 1/2xe^{2x}}}$$

$y(0) = 0$

$$0 = C_1 + C_2$$
$$C_1 = -C_2$$

$y´(0) = 5$

$$y'_{SG} = 2C_2\, e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + xe^{2x}$$
$$5 = 2C_2 + 1/2$$
$$C_2 = 9/4 \qquad C_1 = -9/4$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_{SP} = -9/4 + 9/4\, e^{2x} + 1/2xe^{2x}}}$$