TEMA1

1) Determinar el ó los valores de $\mathbf{k} \in \Re$ para que el conjunto solución del sistema homogéneo asociado al dado sea un subespacio de $(\Re^3,+,\Re,\bullet)$ de dimensión cero

$$\begin{cases} -x-y-z=4 \\ kx+4y-2z=5 \\ 2x-y-kz=1 \end{cases}$$

$\boxed{k \neq -2 \ \wedge \ k \neq 7}$

El sistema homogéneo asociado $\begin{cases} -x-y-z=0 \\ kx+4y-2z=0 \\ 2x-y-kz=0 \end{cases}$ **tiene dimensión cero si solo si es un sistema compatible determinado o sea la única solución es el vector nulo.**

Como el sistema es cuadrado el determinante de sus coeficientes debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ k & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -k \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow \ (-1)(-4k-2)+1(-k^2+4)-1(-k-8) \neq 0$$

$$4k+2-k^2+4+k+8 \neq 0$$

$$-k^2+5k+14 \neq 0$$

La solución de la ecuación $-k^2+5k+14=0$

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{-2} = \frac{-5 \pm 9}{-2}$$

$$\Rightarrow k=-2 \ \vee \ k=7$$

Luego para que $-k^2+5k+14 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k \neq -2 \ \wedge \ k \neq 7}$

2) Sea $\mathbf{A} = \{ (1;2;0), (1;k;0), (-1;-2;k) \}$

a) Hallar $\mathbf{k} \in \Re$ para que el conjunto de vectores de **A** sea linealmente independiente $\boxed{k \neq 0 \ \wedge k \neq 4}$

b) Usando el conjunto A, si $\mathbf{k=0}$, ¿Qué subespacio se genera? $\boxed{\bar{A} = \{(x;y;z) \in \Re^3 / z=0\}}$

c) Hallar una base y la dimensión de $\bar{A}$. $\boxed{B = \{ (1;0;0), (0;1;0) \} \ \dim \bar{A} = 2}$

a) $A=\{(1;2;0),(2;k;0),(-1;-2;k)\}$ es linealmente independiente si y solo si la única combinación lineal que da el vector nulo es la trivial o sea:

$\alpha(1;2;0))+\beta(2;k;0)+\gamma(-1;-2;k)=(0;0;0) \quad \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0 \quad \Rightarrow \quad LI$

$(\alpha;2\alpha;0)+(2\beta;k\beta;0)+(-\gamma;-2\gamma;k\gamma)=(0;0;0)$

$$(\alpha+2\beta-\gamma;2\alpha+k\beta-2\gamma;k\gamma)=(0;0;0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta-\gamma=0 \\ 2\alpha+k\beta-2\gamma=0 \\ k\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & k & -2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array}\right)$$

El sistema homogéneo a resolver es cuadrado y para que la única solución sea la nula o trivial el sistema debe ser compatible determinado entonces el determinante de sus coeficientes debe ser distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & k & -2 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k(k-4)\neq 0 \Rightarrow$$

La solución de la ecuación $k(k-4)=0 \Rightarrow k=0 \ \vee \ k-4=0 \Rightarrow k=0 \ \vee \ k=4$

Luego para que $k(k-4)\neq 0 \Rightarrow \boxed{k\neq 0 \ \wedge \ k\neq 4}$

b) Si $k=0$ entonces $A=\{1;2;0),(2;0;0),(-1;-2;0)\}$ y teniendo en cuenta el punto anterior la familia A es L.D y generan un subespacio de $V=\Re^3$

Planteamos la C.L igualando a un vector genérico de $\Re^3$

$\alpha(1;2;0)+\beta(2;0;0)+\gamma(-1;-2;0)=(x;y;z)$

$(\alpha;2\alpha;0)+(2\beta;0;0)+(-\gamma;-2\gamma;0) \ =(x;y;z)$

$$(\alpha+2\beta-\gamma;2\alpha-2\gamma;0)=(x;y;z) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta-\gamma=x \\ 2\alpha \quad -2\gamma=y \\ 0=z \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & x \\ 2 & 0 & -2 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & -4 & 0 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right) F_2.\left(-\frac{1}{4}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{y-2x}{-4} \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y-2x}{-4} \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right)$$

Para que resulta un sistema compatible: $r(A)=r(A') \Rightarrow z=0 \Rightarrow \boxed{\bar{A}=\{(x;y;z)\in\Re^3 / z=0\}}$

c) Escribimos un vector genérico $(x;y;z)=(x;y;0)=(x;0;0)+(0;y;0)=x(1;0;0)+y(0;1;0)$

$\{(1;0;0),(0;1;0)\}$ son generadores de $\bar{A}$ y además son L.I luego son base

$B=\{(1;0;0),(0;1;0)\}$ $\dim \bar{A}=2$

3) Si las coordenadas del vector **v = (52; 52)** respecto de la base:
B = { (a ; a + 2) , (3b-2 ; b) } son $[8\,;\,4]_B$, hallar la base encontrando los valores de a y b

$$\boxed{a = 3 \text{ y } b = 3 \ \Rightarrow B = \{(3;5),(7;3)\}}$$

De acuerdo a los datos del problema podemos escribir :

$8(\,a\,;a+2\,)+4\,(\,3b-2\,;b\,)=(52;52)$

Cualquier vector de $\Re^2$ se puede escribir como combinación lineal de una base de $\Re^2$ y las coordenadas del mismo son los escalares de dicha combinación

$(\,8a\,;8\,a+16\,)+(\,12b-8\,;4b\,)=(52;52)$

$(\,8\,a+12b-8\ ;\ 8\,a+16+4b\,)=(52;52)$

$$(\,8\,a+12b-8;\ 8\,a+4b+16\,)\ =(52;52)\ \Rightarrow\ \begin{cases}8\,a+12b=60\\ 8\,a+\ 4b=36\end{cases}\ \Rightarrow\ a=3\wedge b=3$$

Entonces reemplazando los valores de a y b la base pedida es $B=\{(3;5),(7;3)\}$

4) El vector precio es un múltiplo escalar del vector **(6; 4; 6),** una de las posibilidades de consumo es **(50; 60; 20).** Si el ingreso es de **$ 2640**. Hallar:

a) El vector precio. $\boxed{\vec{p}=(p_1;p_2;p_3)=(24\,;16\,;24)}$

b) Hallar la ecuación presupuestaria. $\boxed{24x+16y+24z=2640}$

c) La ecuación del plano balance $\boxed{\dfrac{x}{110}+\dfrac{y}{165}+\dfrac{z}{110}=1}$

a) $(p_1;p_2;p_3)=\alpha(6;4;6)=(6\alpha;4\alpha;6\alpha)$

Como (50 : 60 : 20) es una posibilidad de consumo y $2640 es el ingreso se puede escribir :

$50.6\alpha+60.4\alpha+20.6\alpha=2640\Rightarrow 300\alpha+240\alpha+120\alpha=2640\ \Rightarrow\ 660\alpha=2640\ \Rightarrow\ \alpha=4$

$\vec{p}=(p_1;p_2;p_3)=(6.4\,;4.4\,;6.4)=\boxed{\vec{p}=(p_1;p_2;p_3)=(24\,;16\,;24)}$

b) La ecuación presupuestaria es : $\boxed{24x+16y+24z=2640}$

c) Como la ecuación presupuestaria es : $24x+16y+24z=2640$

$$\frac{24x+16y+24z}{2640}=\frac{2640}{2640}\ \Rightarrow\ \frac{24x}{2640}+\frac{16y}{2640}+\frac{24z}{2640}=1\Rightarrow \frac{x}{\frac{2640}{24}}+\frac{y}{\frac{2640}{16}}+\frac{z}{\frac{2640}{24}}=1$$

$$\boxed{\text{El plano balance es}\ \ \frac{x}{110}+\frac{y}{165}+\frac{z}{110}=1}$$

5) a) Maximizar utilizando el método gráfico:

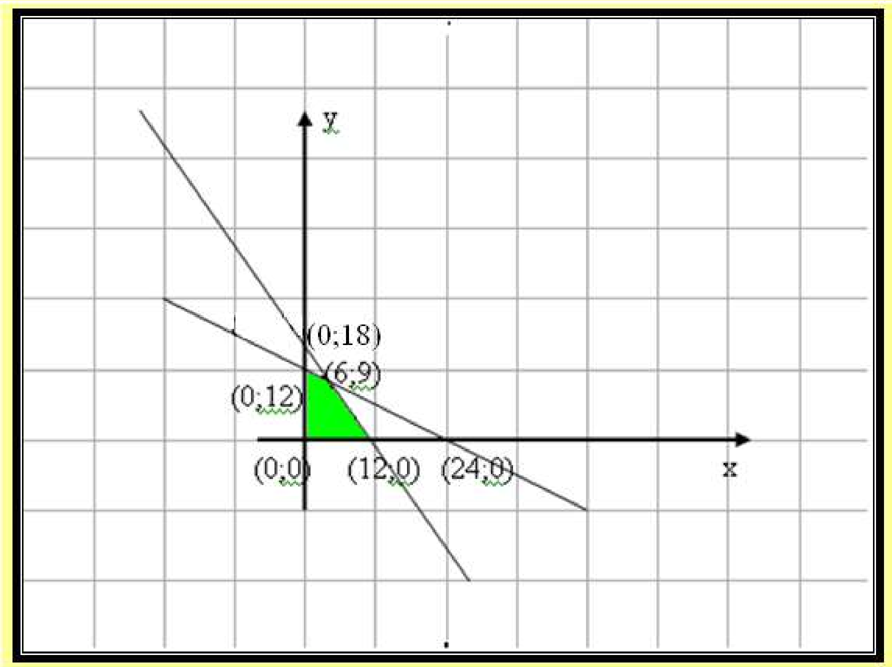
$\mathbf{z = 2x + 4y}$

Sujeta a $\begin{cases} x + 2y \le 24 \\ 3x + 2y \le 36 \end{cases}$ con $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{La función se maximiza en el segmento que une los puntos } (0;12) \text{ y } (6;9) \text{ donde } z = 48}$

$$\begin{cases} x + 2y \le 24 \\ 3x + 2y \le 36 \end{cases} \Rightarrow \text{Los bordes de los semiplanos son } \begin{cases} x + 2y = 24 & \Rightarrow & \dfrac{x}{24} + \dfrac{y}{12} = 1 \\ 3x + 2y = 36 & \Rightarrow & \dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{18} = 1 \end{cases}$$

$$\text{La intersección de las rectas es la solución del sistema } \begin{cases} x + 2y = 24 \\ 3x + 2y = 36 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = (6;9)$$



La región factible es el polígono cerrado cuyos vértices son: (0;0) (0;12) (6;9) (12;0)

Calculamos $z = 2x + 4y$ en cada uno de los vértices

$z(0;0) = 2.0 + 4.0 = 0$

$z(0;12) = 2.0 + 4.12 = 48$

$z(6;9) = 2.6 + 4.9 = 48$

$z(12;0) = 2.12 + 4.0 = 24$

$\boxed{\text{La función se maximiza en el segmento que une los puntos } (0;12) \text{ y } (6;9) \text{ donde } z = 48}$

5) b) Sea : $\mathbf{z = 4x + 8y}$

Sujeta a $\begin{cases} \mathbf{5x + 2y \le 20} \\ \mathbf{x + y \le 3} \end{cases}$ con $\begin{cases} \mathbf{x \ge 0} \\ \mathbf{y \ge 0} \end{cases}$

Maximizar utilizando el simplex ***Solución que optimiza :*** $(x_1 ; x_2 ; s_1 ; s_2) = (0 ; 3 ; 14 ; 0)$ $z = 24$

Las restricciones las transformamos en igualdades, mediante la adición de las variables de holgura

$$\begin{cases} \mathbf{5x + 2y + s_1 = 20} \\ \mathbf{x + y + s_2 = 3} \end{cases}$$

	C_j	4	8	0	0		
	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	b	
0	s_1	5	2	1	0	20	20/2 = 10
0	s_2	1	1	0	1	3	3/1 = 3 ***Sale la variable*** s_2
Z_j		0	0	0	0	Z = 0	
$C_j - Z_j$		4	8	0	0		
			Entra la variable X_2				

	C_j	4	8	0	0	
C_k	X_k	X_1	X_2	s_1	s_2	b
0	s_1	3	0	1	–2	14
8	X_2	1	1	0	1	3
Z_j		8	8	0	8	Z=24
$C_j - Z_j$		–4	0	0	–8	

Como en la ultima fila de la tabla no han quedado valores positivos hemos llegado a la Solución óptima

De la lectura de la tabla se deduce que las ***Variables básicas son*** $x_2 = 3$ *y* $s_1 = 14$

Variables no básicas son : $x_1 = 0$ *y* $s_2 = 0$

Solución que optimiza : $(x_1 ; x_2 ; s_1 ; s_2) = (0 ; 3 ; 14 ; 0)$ $z = 24$