UTN FRBA **FINAL ANÁLISIS MATEMÁTICO I** **24-05-2023**

Apellido y nombres del alumno:..
Corrigió:... Revisó:..

La condición para aprobar este parcial es tener bien resuelto el 50 % del parcial

1		2	3	4		5		CALIFICACIÓN

IMPORTANTE: usted debe presentar en las hojas que entrega, el desarrollo de todos los ejercicios, para justificar sus respuestas.

1) Analizar si las afirmaciones siguientes son verdaderas (V) o falsas (F).

Justificar las respuestas

a) La integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ es convergente

b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \cos^4 x . dx = 0$

2) Determinar y clasificar los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = (x+2)\, arctg \frac{1}{4-x^2}$$

3) Determinar las coordenadas de los vértices de un triángulo isósceles de máxima área tal que uno de sus vértices sea el origen de coordenadas y los otros dos se encuentren en puntos simétricos de la curva $x = 36 - y^2$ con $-6<y<6$

4) a) Determinar la función f tal que $f'(x) = \frac{\ln(x+3)}{(x+3)}$ y $f(-2) = 1$

b) Hallar el Polinomio de Taylor de grado 2 asociado a G(x) en x=1. Siendo: G(x)= $\int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4+1} dt$

5) a) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$, a) Determinar el intervalo de convergencia en la cual la serie converge.

b) Indique el sentido de la concavidad de la gráfica de f en x=0. Justifique.

1)

a) VERDADERO

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$$

1º) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \int \frac{dx}{\frac{(e^x)^2+1}{e^x}} = \int \frac{e^x\,dx}{(e^x)^2+1}$

Por sustitución: $u=e^x \Rightarrow du = e^x dx$, luego:

$$\int \frac{e^x\,dx}{(e^x)^2+1} = \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \operatorname{arctg}(u)+C = \operatorname{arctg}(e^x)+C$$

2º) $\displaystyle\int_0^t \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \operatorname{arctg}(e^x)\Big|_0^t = \operatorname{arctg}(e^t)-\operatorname{arctg}(e^0) =$

$= \operatorname{arctg}(e^t) - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}(e^t) - \frac{\pi}{4}$

3º) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \lim_{t\to+\infty}\Big(\underbrace{\operatorname{arctg}(\underbrace{e^t}_{\downarrow\, +\infty})}_{\downarrow\,\pi/2} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Luego, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ converge

---

b) VERDADERO

Sea $f(x) = x^3\cos^4(x)$. Entonces, para todo $x\in\mathbb{R}$:

$f(-x) = (-x)^3\cos^4(-x) = -x^3\cos^4(x) = -f(x)$

con lo cual f es impar. Luego:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} x^3\cos^4(x)\,dx = 0$$

2) Sea $f(x) = (x+2) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)$

Claramente $Df = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$.

a) f es continua en $x=2$ si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$:

- $f(2)$ no existe
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)$

Notemos que:

$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{4-x^2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{4-x^2} = +\infty$

con lo cual:

$\lim\limits_{x \to 2^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4-x^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4-x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Siendo $\lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$, resulta que:

$$\lim_{x \to 2^+} (x+2) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4-x^2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$$

$$\lim_{x \to 2^-} (x+2) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4-x^2}\right) = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

con lo cual $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe, entonces la discontinuidad es esencial

b) f es continua en $x=-2$ si $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$:

- $f(-2)$ no existe
- $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \underbrace{(x+2)}_{\downarrow \atop 0} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4-x^2}\right)}_{\text{acotada}} = 0$

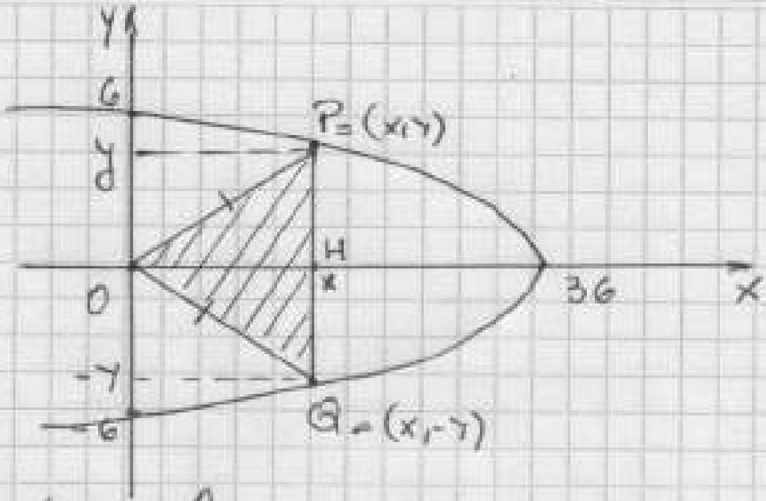
Luego, f presenta en $x=-2$ una discontinuidad evitable.

NOTA

HOJA Nº 3

FECHA

3)



área $\overset{\Delta}{OPQ} = 2 \cdot$ área $\overset{\Delta}{OPH} = 2 \cdot \frac{x \cdot y}{2}$, $0<y<6$

Sea $f(x,y) = xy$ el área a maximizar.

Sabemos que $x = 36 - y^2$, $-6<y<6$, luego:

$f(x) = x \cdot y = (36-y^2)\,y = 36y - y^3$, $0<y<6$

$f'(y) = 36 - 3y^2$, $0<y<6$

$f'(y) = 0 \Rightarrow 36 - 3y^2 = 0 \Rightarrow 3y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$

Sg f' (+ + + 0 − − −)

$0 \qquad 2\sqrt{3} \qquad 6$

$f'(1)$ + $f'(4)$ −

Vemos que $f(2\sqrt{3})$ es máximo. Luego los vértices del triángulo de área máxima son:

$O = (0;0)$; $P = (24, 2\sqrt{3})$; $Q = (24, -2\sqrt{3})$.

NOTA: Si $y = 2\sqrt{3}$, entonces $x = 36 - (2\sqrt{3})^2 = 12$

NOTA

HOJA Nº 4

FECHA

4)

a) $f'(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3} \Rightarrow f(x) = \displaystyle\int \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}\,dx$

Sea $t = \ln(x+3)$, entonces $dt = \dfrac{1}{x+3}\,dx$, luego:

$$\int \frac{\ln(x+3)}{x+3}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2(x+3)}{2} + C$$

Entonces $f(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln^2(x+3) + C$.

Como $f(-2) = 1$, $\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\ln^2(1)}_{0} + C = 1$, luego $C = 1$

Luego: $\quad f(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x+3) + 1.$

---

b) Sea $G(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4+1}\,dt$

Si $f(t) = \dfrac{t^3}{t^4+1}$ entonces: $f(-t) = \dfrac{(-t)^3}{(-t)^4+1} = -\dfrac{t^3}{t^4+1} = -f(t)$

para todo $t \in \mathbb{R}$, con lo cual f es impar.

$P_2(x) = G(1) + G'(1)(x-1) + \dfrac{G''(1)}{2!}(x-1)^2$

- $G(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t^3}{t^4+1}\,dt \Rightarrow G(1) = \int_{-1}^{1} \frac{t^3}{t^4+1}\,dt = 0$, por ser f impar.
- $G'(x) = \dfrac{x^3}{x^4+1} \Rightarrow G'(1) = \dfrac{1}{2}$
- $G''(x) = \dfrac{3x^2\cdot(x^4+1) - x^3\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} = \dfrac{3x^6 + 3x^2 - 4x^6}{(x^4+1)^2} = \dfrac{3x^2 - x^6}{(x^4+1)^2}$

  $G''(1) = \dfrac{1}{2}$

Luego: $\quad P_2(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^2$

NOTA

5)

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{x^{n+1}} \right| = |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 = |x|$$

La serie es abs. cv. si $|x| < 1$, o sea, $-1 < x < 1$.

$x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge por ser una serie p, $p>1$.

$x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$ serie alternada.

Se puede demostrar que verifica las hipótesis del criterio de Leibniz, luego converge.

Entonces f converge en $-1 \le x \le 1$.

b) $f(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$

$f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow f$ es cóncava positiva en $x=0$

NOTA