TEMA 6

Ejercicio 1 (2 puntos)

Considerar la función

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$$

Determinar todos los puntos del plano en los cuales la recta tangente a la gráfica de f es perpendicular a la recta $y = \frac{1}{3}x - 2$

Respuesta

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0 es

$y_t = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Como la recta tangente debe ser perpendicular a la recta $y = \frac{1}{3}x - 2$ tenemos que la pendiente debe ser igual a

$$f'(x_0) = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3$$

La derivada de la función es

$f'(x) = -x^2 - 2x$

Ahora debemos buscar el o los valores de x_0 para los cuales $f'(x_0) = -3$.

Entonces

$$-x^2 - 2x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} \quad \Rightarrow \quad x = -3 \;\text{ ó }\; x = 1$$

Calculamos el valor de la función en estos valores:

$$f(-3) = -\frac{1}{3}(-3)^3 - (-3)^2 + 1 = 1$$

$$f(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 - (1)^2 + 1 = -\frac{1}{3}$$

Luego, los puntos buscados son $P = (-3; 1)$, $Q = \left(1; -\frac{1}{3}\right)$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Hallar la familia de primitivas de

$$\int \sqrt{x+6} - 8 \cdot sen(x)\ dx$$

Respuesta

Aplicando las propiedades de las integrales tenemos que

$$\int \sqrt{x+6} - 8sen(x)\ \ dx = \int \sqrt{x+6}\ dx - 8\int sen(x)\ dx$$

Para calcular la integral $\int \sqrt{x+6}\ dx$ aplicamos la sustitución $u = x + 6$. Como $du = (x+6)'dx = dx$, tenemos que $du = dx$ y la integral se reduce a calcular:

$$\int \sqrt{x+6}\ dx = \int \sqrt{u}\ du = \int u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3}\sqrt{(x+6)^3} + k_1$$

Por otro lado $\int sen(x)\ dx = -cos(x) + k_2$

Entonces

$$\int \sqrt{x+6} - 8 \cdot sen(x)\ dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+6)^3} + 8 \cdot cos(x) + K$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Considerar la función

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{ax} + b$$

Se sabe que su conjunto de negatividad C^- es el intervalo $(-2; +\infty)$ y su ordenada al origen es -80.

Determinar los valores de a, b, ambos números reales.

Respuesta

La ordenada al origen es -80, entonces:

$$f(0) = -80 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{a\cdot 0} + b = -80 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + b = -80 \quad \Leftrightarrow \quad b = -81$$

Como la función es negativa en el intervalo $(-2; +\infty)$ tenemos que

$$f(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{a\cdot(-2)} + b = 0$$

Como ya vimos que $b = -81$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a\cdot(-2)} - 81 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2a} = 81 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Considerar la función

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 1$$

Hallar los extremos locales de f.

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Respuesta

Primero hallamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

El dominio de la función derivada es el conjunto de todos los números reales.

Para hallar los puntos críticos debemos buscar aquellos valores para los cuales se anula la derivada primera.

$f'(x) = 0 \iff 2 - 2x^2 = 0 \iff 2x^2 = 2 \iff |x| = 1 \iff x = 1$ ó $x = -1$

Para analizar el signo de la derivada es suficiente con evaluar el signo del polinomio del numerador ya que el denominador es siempre positivo. Entonces:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Por lo tanto, la función es creciente en el intervalo $(-1; 1)$

La función es decreciente en los intervalos $(-\infty; -1)$ y $(1, +\infty)$

Los extremos locales son:

- Máximo en el punto $Max = \left(1; f(1)\right)$
- Mínimo en el punto $Min = \left(-1; f(-1)\right)$