TEMA 2

Ejercicio 1 (2 puntos)

Considerar la función

$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad / \quad f(x)=2^{ax}+\mathrm{b}$$

Se sabe que su conjunto de positividad C^+ es el intervalo $(1;+\infty)$ y su ordenada al origen es -7.

Determinar los valores de a, b, ambos números reales.

Respuesta

La ordenada al origen es -7, entonces

$f(0)=-7 \quad \Rightarrow \quad 2^{a\cdot 0}+b=-7 \quad \Leftrightarrow \quad 1+b=-7 \quad \Leftrightarrow \quad b=-8$

Como la función es positiva en el intervalo $(1;+\infty)$ tenemos que

$f(1)=0 \quad \Rightarrow \quad 2^{a\cdot 1}+b=0$

Como ya vimos que $b=-8$

$2^a-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^a=8 \quad \Rightarrow \quad a=3$

Ejercicio 2 (3 puntos)

Considerar la función

$$f(x)=1-\frac{x}{x^2+4}$$

Hallar los extremos locales de f.

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Respuesta

Primero hallamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x)=-\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{x^2-4}{(x^2+4)^2}$$

El dominio de la función derivada es el conjunto de todos los números reales.

Para hallar los puntos críticos debemos buscar aquellos valores para los cuales se anula la derivada primera.

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff |x| = 2 \iff x = 2$ ó $x = -2$

Para analizar el signo de la derivada es suficiente con evaluar el signo del polinomio del numerador ya que el denominador es siempre positivo. Entonces:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Por lo tanto, la función es decreciente en el intervalo $(-2; 2)$

La función es creciente en los intervalos $(-\infty; -2)$ y $(2, +\infty)$

Los extremos locales son:

- Máximo en el punto $Max = (-2; f(-2))$
- Mínimo en el punto $Min = (2; f(2))$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Considerar la función

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Determinar todos los puntos del plano en los cuales la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta $y = x - \frac{1}{3}$

Respuesta

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0 es

$y_t = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Como la recta tangente debe ser paralela a la recta $y = x - \frac{1}{3}$ tenemos que la pendiente debe ser igual a

$f'(x_0) = 1$

La derivada de la función es

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

Ahora debemos buscar el o los valores de x_0 para los cuales $f'(x_0) = 1$.

Entonces

$$3x^2 - 4x + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ó } x = \frac{4}{3}$$

Calculamos el valor de la función en estos valores:

$f(0) = 0$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} = \frac{4}{27}$$

Luego, los puntos buscados son $P = (0;0)$, $Q = \left(\frac{4}{3};\frac{4}{27}\right)$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Hallar la familia de primitivas de

$$\int \sqrt{x-2} + 5cos(x)\ dx$$

Respuesta

Aplicando las propiedades de las integrales tenemos que

$$\int \sqrt{x-2} + 5cos(x)\ dx = \int \sqrt{x-2}\ dx + 5\int cos(x)\ dx$$

Para calcular la integral $\int \sqrt{x-2}\ dx$ aplicamos la sustitución $u = x - 2$. Como $du = (x-2)'dx = dx$, tenemos que $du = dx$ y la integral se reduce a calcular:

$$\int \sqrt{x-2}\ dx = \int \sqrt{u}\ du = \int u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} + k_1$$

Por otro lado $\int cos(x)\ dx = sen(x) + k_2$

Entonces

$$\int \sqrt{x-2} + 5\,cos(x)\ dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} + 5sen(x) + K$$