**Ejercicio 1**

Considerando la recta $R$ que pasa por los puntos $A = (3; 0; 3)$ y $B = (2; -3; 5)$ y el punto $P = (2; -1; 1)$, hallar la ecuación implícita del plano $\pi$ que es perpendicular a la recta $R$ y contiene al punto $P$.

**Solución y comentarios**

Como la recta R es perpendicular al plano $\pi$ buscado, el vector director de la recta es paralelo al vector normal del plano. Calculemos el vector director de la recta al que llamaremos $\vec{v}$:

$$\vec{v} = B - A = (2; -3; 5) - (3; 0; 3) = (-1; -3; 2)$$

Cualquier vector paralelo a $\vec{v}$ puede ser utilizado como vector normal de $\pi$, en particular podemos tomar el mismo $\vec{v}$. Entonces, la ecuación implícita del plano que tiene a $\vec{v}$ por vector normal y pasa por el punto P la obtenemos desarrollando el producto escalar:

$$(X - P).\vec{v} = 0$$

$$[(x; y; z) - (2; -1; 1)].(-1; -3; 2) = 0$$

$$(x - 2; y + 1; z - 1).(-1; -3; 2) = 0$$

$$(x - 2).(-1) + (y + 1).(-3) + (z - 1).2 = 0$$

$$-x + 2 - 3y - 3 + 2z - 2 = 0$$

$$\boldsymbol{\pi\text{: } -x - 3y + 2z - 3 = 0}$$

**Ejercicio 2**

Sometido a variaciones de presión, la temperatura de un fluido a través del tiempo está dada por la función:

$$H(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 10$$

donde $t$ representa el tiempo (medido en horas) y $H(t)$ la temperatura (medida en grados Celsius).

Determinar, en el período de tiempo que va de $t_0 = 0$ a $t_1 = 7$ la máxima y la mínima temperatura que alcanza el fluido y los intervalos de tiempo en los cuales la temperatura aumenta y en los que disminuye durante esas siete horas.

**Solución y comentarios**

En primer lugar notemos que el dominio de la función ajustado al problema corresponde al intervalo $[0; 7]$ (incluímos los instantes iniciales y finales)

Hallar las temperaturas máximas y mínimas equivale a encontrar los extremos relativos de la función en dicho intervalo. Para ello, derivamos la función

$$H'(t) = 3t^2 - 18t + 15$$

Buscamos los puntos críticos igualando la derivada a cero:

$$H'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 18t + 15 = 0$$

Notamos que $(-18)^2 - 4.3.15 = 144 > 0$, por lo que la ecuación tendrá dos soluciones. Las calculamos:

$$t_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{144}}{2.3} = \frac{18 \pm 12}{6} = \begin{cases} t_1 = 5 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Obtuvimos dos puntos críticos. Analizamos el signo de la derivada en el intervalo indicado para estudiar su crecimiento:

| | $(0; 1)$ | $1$ | $(1; 5)$ | $5$ | $(5; 7)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $H'(t)$ | $H'(0,5) = 6,75 > 0$ | $0$ | $H'(2) = -9 < 0$ | $0$ | $H'(6) = 15 > 0$ |
| $H(t)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Por lo tanto, la temperatura **crece en los intervalos** $(\mathbf{0}; \mathbf{1})$ **y** $(\mathbf{5}; \mathbf{7})$ y **decrece en el intervalo** $(\mathbf{1}; \mathbf{5})$.

Además, $t = 1$ es un máximo relativo y $t = 5$ es un mínimo relativo.

Calculamos qué temperatura alcanza en cada caso:

Para $t = 1 \quad \rightarrow H(1) = 1 - 9.1 + 15.1 + 10 = 17$

Para $t = 5 \quad \rightarrow H(5) = 5^3 - 9.5^2 + 15.5 + 10 = -15$

Debemos analizar también las temperaturas en los instantes iniciales y finales del experimento, ya que podría tomar valores mayores al máximo o menores al mínimo calculado.

Para $t = 0 \quad \rightarrow H(0) = 10$

Para $t = 7 \quad \rightarrow H(7) = 7^3 - 9.7^2 + 15.7 + 10 = 17$ (en este caso coincide con la temperatura máxima)

**Por lo tanto, el fluido alcanza una temperatura mínima de -15°C a las 5 horas y una temperatura máxima de 17 °C a la hora y a las 7 horas de experimento.**

**Ejercicio 3**

Hallar la ecuación paramétrica de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 4$ en el punto $A = (1; 3)$.

**Solución y comentarios**

Calculemos en primer lugar la ecuación *explícita* de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto *A*.

Dicha ecuación tiene la forma $y = ax + b$.

Sabemos que la pendiente de la recta tangente en un punto equivale al valor de la función derivada en dicho punto. Es decir $a = f'(1)$. Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$$

Evaluamos en $x = 1$ para obtener *a:*

$$a = f'(1) = 3.1 + 2.1 - 3 = 2$$

Conocido $a$, podemos hallar $b$ sabiendo que en el punto de tangencia $(1; 3)$tanto la función como la recta tangente tienen la misma imagen:

$$y(1) = f(1)$$

$$2.1 + b = 1^3 + 1^2 - 3.1 + 4$$

$$2 + b = 3 \Rightarrow b = 1$$

Y la ecuación explicita de la recta tangente en *A* es $y = 2x + 1$.

Para hallar la ecuación paramétrica de la recta tangente necesitamos un vector director y un punto de la recta.

Para hallar el primero, consideramos dos puntos A y B cualesquiera de la recta y calculamos el vector equivalente a $\overrightarrow{AB}$:

Para $x = 0$, $y = 2.0 + 1 = 1 \rightarrow A: (0; 1)$

Para $x = 1$, $y = 2.1 + 1 = 3 \rightarrow B: (1; 3)$

$$\overrightarrow{AB} = (1; 3) - (0; 1) = (1; 2)$$

Con el vector hallado y cualquiera de los dos puntos calculados obtenemos la expresión paramétrica de la recta:

Por ejemplo:

$$\boldsymbol{T: (x; y) = \lambda(1; 2) + (0; 1)}$$

**Ejercicio 4**

Calcular el área determinada por las gráficas de las funciones f y g siendo:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = (x-2)^2$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; g(x) = -x^2 + 4x - 2$$

**Solución y comentarios**

En primer lugar calculamos los puntos en los cuales las dos curvas se cortan:

$$f(x) = g(x)$$

$$(x-2)^2 = -x^2 + 4x - 2$$

$$x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 4x - 2$$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

Como $(-8)^2 - 4.2.6 = 16 > 0$ la ecuación tiene solución y estas son:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2.2} = \frac{8 \pm 4}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

El área buscada, entonces, es la determinada entre $x = 1$ y $x = 3$. Para determinar cuál de las dos es mayor en el intervalo $(1; 3)$ evaluamos ambas funciones en $x = 2$:

Como $f(2) = 0$ y $g(2) = 2$ como consecuencia del Teorema de Bolzano, $\boldsymbol{g(x) > f(x)}$ para todo x que pertenezca al intervalo $(1; 3)$.

Para calcular el área resolvemos la integral definida (Usamos el desarrollo de $f(x) = x^2 - 4x + 4$ realizado arriba) :

$$A = \int_1^3 \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

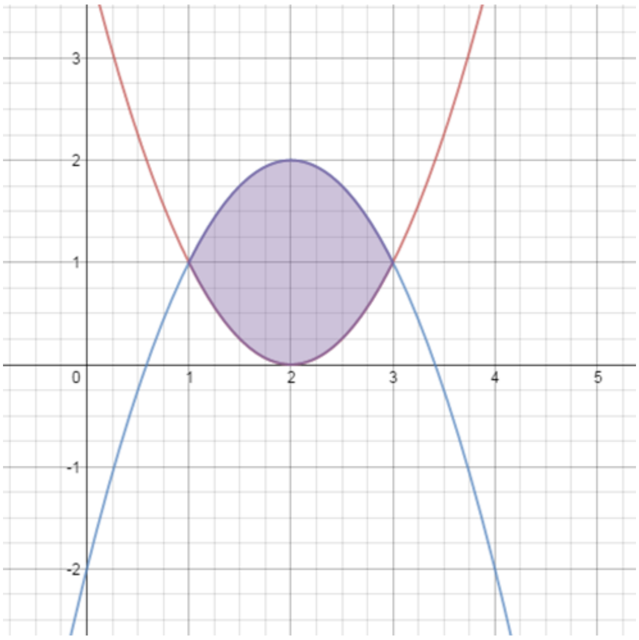
$$A = \int_1^3 [-x^2 + 4x - 2 - (x^2 - 4x + 4)]dx = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)dx$$

$$A = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x\right]_1^3 = \left(-\frac{2}{3}.3^3 + 4.3^2 - 6.3\right) - \left(-\frac{2}{3} + 4 - 6\right) = 0 - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

Y el área buscada es de $\boldsymbol{\frac{8}{3}}$

Podemos, también, representar las funciones y el área gráficamente:

$f(x)$




$g(x)$

**Ejercicio 5**

Dado el sistema: $\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ x - y + (2+a)z = 2 - a \\ -x - ay + az = -3 \end{cases}$

Determinar todos los valores de $a$ para que el sistema tenga:

i. Una única solución
ii. Infinitas soluciones
iii. Ninguna solución

**Solución y comentarios**

Escribimos el sistema de ecuaciones en la forma matricial y lo resolvemos por el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2+a & 2-a \\ -1 & -a & a & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & -a-3 & 2-a \\ -1 & -a & a & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & -a-3 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & -2 \end{array}\right)$$

Y obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ (a+1)y + (-a-3)z = a - 1 \\ (a-1)z = -2 \end{cases}$$

Analizamos los posibles valores de en la diagonal:

Si $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$ y el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y - 4z = 0 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

De la tercera ecuación se comprueba que el sistema es incompatible.

Si $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ y el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -2z = -2 \\ -2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ \\ -2z = -2 \end{cases}$$

Como el grado de la matriz de coeficientes es igual al grado de la matriz ampliada (2) pero menor al número de ecuaciones, el sistema es compatible indeterminado y admite infinitas soluciones.

Para cualquier otro valor de a, si trata de un sistema triangulado, por lo que tiene solución única.

Por lo tanto:

**i. El sistema tiene solución única si $a \neq 1$ y $a \neq -1$.**
**ii. El sistema tiene infinitas soluciones si $a = -1$.**
**iii. El sistema no tiene solución si $a = 1$.**