ANÁLIS. MATE. ING. - EXAC. 1F 1C 2018 **TEMA 2 -** 11-07-18 UBA XXI	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 2 hs
	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN:
	E-MAIL:	
	TELÉFONOS part: cel:	Apellido del evaluador:

Completar con letra clara, mayúscula e imprenta

El examen cuenta con diez ejercicios de opción múltiple. Cada uno vale un punto. En estos ejercicios únicamente se corregirá la opción marcada. Se debe elegir una ÚNICA respuesta. Si se escribe más de una opción se considerará inválida la respuesta.
El examen tiene que ser entregado en tinta y no se permite el uso de teléfonos móviles.
Copie sus resoluciones en una hoja que será entregada por el personal de UBA XXI para comparar con los criterios de corrección que estarán disponibles en la solapa "Evaluación" del campus virtual de la materia.

1) Sea $f: R \to R$ derivable en R infinitamente, tal que cumple $f(x)\,f'(x)+x=3,\ f(1)=2$, entonces, su polinomio de Taylor de grado 2, centrado en x = 1 es:

- [ ] $p(x)=3+2x-(x-1)^2$
- [ ] $p(x)=2+(x-1)-(x-1)^2$
- [x] $p(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

Para el polinomio de Taylor de orden 2 en x = 1 necesitamos f(1), f'(1) y f''(1), pero f(1) es dato, nos dicen que vale 2. Entonces f'(1) sale de despejar.

$$f(1)f'(1)+1=3$$
$$2f'(1)=2$$
$$f'(1)=1$$

Luego derivamos sabiendo los valores de la función y su derivada en x = 1.

$$f'(x).f'(x)+f(x).f''(x)+1=0$$

Despejamos:

$$f'(x).f'(x)+f(x).f''(x)+1=0$$
$$2f''(1)=-2$$
$$f''(1)=-1$$

Armamos el polinomio de Taylor y al desarrollar nos queda la respuesta marcada.

2) La integral de $\int \frac{g(x)}{x^2-1}dx$ donde $g(x)$ es la función inversa de $f(x)=x-2$ es:

- [ ] $\ln|x^2-1|+C$
- [ ] $\ln(|x+1||x-1|)+C$
- [x] $-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+C$
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

La inversa de f(x) es g(x) = x + 2, reemplazamos en la integral y por el método de fracciones simples hallamos los valores de A y B, luego integramos y nos queda la respuesta marcada.

3) La suma de la siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2\, r^n$, donde $r = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n-3}-2n\right)$ es:

- [ ] 8/3
- [ ] 4/3
- [x] 2/3
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

En primer lugar sacamos r multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n-3}-2n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n-3}-2n\right)\frac{\left(\sqrt{4n^2+n-3}+2n\right)}{\left(\sqrt{4n^2+n-3}+2n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(4n^2+n-3-4n^2\right)}{\left(\sqrt{4n^2+n-3}+2n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)}{\left(\sqrt{4n^2+n-3}+2n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(1-3/n)}{2n\left(\sqrt{1+1/4n-3/4n^2}+1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-3/n)}{2\left(\sqrt{1+1/4n-3/4n^2}+1\right)} = 1/4$$

Ahora calculamos la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2(1/4)^n = 2\sum_{n=1}^{\infty}(1/4)^n = 2\left[\frac{1}{1-1/4}-1\right] = 2\left(\frac{4}{3}-1\right) = 2/3$$

4) Las funciones primitivas de $\int (x+1)e^{p(x)}dx$ donde $p(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 2, centrado en x = 0, de la función $f(x) = sen(2x) - 2 + x^2$ son:

- [ ] $e^{x^2+2x-2} + C$
- [ ] $xe^{2x^2+2x-2} + (x+1)e^{2x^2+2x-2} + C$
- [x] $\dfrac{e^{x^2+2x-2}}{2} + C$
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

Primero hallamos el polinomio de Taylor:

$$f(x) = sen(2x) - 2 + x^2$$
$$f'(x) = 2\cos(2x) + 2x$$
$$f''(x) = -4sen(2x) + 2$$

Evaluando en el punto x = 0

$$f(0) = -2$$
$$f'(0) = 2$$
$$f''(0) = 2$$

Entonces:

$$p(x) = -2 + 2x + x^2$$

Reemplazamos en la integral y por el método de sustitución queda la respuesta marcada.

5) Sea $p(x) = 3 - 2x^2 + x^3$ el polinomio de Taylor de grado 3, centrado en x = 1, de una función *f*. Entonces, la recta tangente a $g(x) = xf(2x) + \int_1^{2x} f(t)dt$ en x = 1/2 es:

- [ ] $y = 5x + 1$
- [ ] $y = 5x + 3$
- [x] $y = 5x - \frac{3}{2}$
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

Para la recta tangente necesitamos la función en el punto y su derivada:

$$g(1/2) = \frac{1}{2} f(2.\frac{1}{2}) + \int_1^1 f(t)dt = \frac{1}{2} f(1)$$

Por propiedad la integral definida da cero. Además:

$$g'(x) = 1.f(2x) + x.f'(2x).2 + f(2x).2$$

Y para sacar los valores de f(1) y f'(1) usamos su pol. De Taylor. Por lo tanto queda que la recta tg es la marcada en la respuesta.

6) El valor del mínimo absoluto de la función $f(x) = x^2 - 2x - 2$, con $2 \le x \le 3$ es:

- [ ] – 3
- [ ] 2
- [ ] 1
- [x] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

Como f es una cuadrática con el término a positivo, el mínimo absoluto lo tiene en el x del vértice que es x = 1 pero está fuera del intervalo pedido, entonces el mínimo absoluto está en uno de los dos bordes. Evaluando la función en x = 2 y en x = 3 nos queda que el mínimo absoluto está en x = 2 y vale – 2, como no está, la respuesta es "ninguna de las otras".

7) El área encerrada entre la recta $y = x$ y la parábola cuyo vértice es (0, 2) y pasa por el (–1, 1) es:

- [x] 9/2
- [ ] –9/2
- [ ] 2
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

Primero hallamos la cuadrática, con el vértice y un punto nos queda que

$y = -x^2 + 2$

Luego buscamos los puntos de intersección y queda que x = 1 y x = - 2. Luego hacemos la integral definida entre -2 y 1, de la cuadrática menos la lineal y queda 9/2.

8) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n+3}$, donde a es el valor de la derivada en x = 0 de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{sen^2(x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

- [ ] converge de manera absoluta
- [x] no converge
- [ ] no puede calcularse porque f no es derivable en x = 0
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

Primero calculamos la derivada:

$$f(x) = \begin{cases} sen^2(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen^2(h)/h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen^2(h)}{h^2} = 1$$

Reemplazamos en la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$$

Queda una serie que por comparación con una de tipo p = 1 diverge.

9) El área encerrada entre las curvas $y = \ln(x)$, su recta tangente en x = 1 y la recta x = 2 es:

- [x] $\frac{3}{2} - 2\ln(2)$
- [ ] $\frac{3}{2} - \ln(2)$
- [ ] $3 - 2\ln(2)$
- [ ] Ninguna de las otras es válida

Respuesta:

Recta tg:

$$\begin{aligned} &y(1) = 0 \\ &y'(x) = 1/x \\ &y'(1) = 1 \\ &y = 0 + 1(x-1) = x - 1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_1^2 [x - 1 - \ln(x)]dx = \left. \frac{x^2}{2} - x - x\ln(x) + x \right|_1^2 = 2 - 2\ln(2) - 1/2 = 3/2 - 2\ln(2)$$

10) Las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^3 + x^2 - bx}$ donde b es el valor de la abscisa del punto de inflexión de la función $g(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 5$, son:

- [ ] x = 0, x = –2, x = 1
- [x] x = 0, x = 1
- [ ] x = 0
- [ ] Ninguna de las otras es correcta

Respuesta:

Primero buscamos el punto de inflexión de la función g. Al hacer la 2da derivada nos queda que en x = 2 cambia su signo, por lo que la función cambia la curvatura, por lo tanto x = 2 es el valor de la abscisa del punto de inflexión.
Luego lo reemplazamos en b y hallamos las raíces de la expresión del denominador. Nos queda que las raíces son x = 0, x = 1 y x = - 2.
Luego tomamos límite con c/u de esos valores y en x = 0 y x = 1 nos da infinito, pero en x = -2 no, por lo tanto las asíntotas verticales son x = 0 y x = 1.
Nota: como no se aclaró en el enunciado que eran asíntotas verticales se toma también como correcta "ninguna de las otras", ya que y = 0 es A.H y no figura en ninguna respuesta.