Resolución 2° Parcial 2020

1. Solución:

a) Vamos a hallar la forma vectorial de la recta L_2

$$L_2 \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -x + 3z = 0 \end{cases}$$

x = 3z

Reemplazando en la primera ecuación:

$3z - 2y + z = 2$

y = - 1 + 2z

$L_2 : X = (3z, (-1 + 2z), z), \ z \in R$

$X = (0, -1 , 0) + z (3, 2, 1)$

Para que L_1 sea paralela a L_2 , sus vectores directores deben ser paralelos, es decir que debe existir un numero real *c* tal que se cumpla:

$$c (3, 2, 1) = (6, -k, 2)$$

$$3c = 6$$
$$2c = -k$$
$$c = 2$$
$$\text{Si } c = 2 \Rightarrow \quad k = -4$$

Verificándose también la primer ecuación.

b) Si la recta L_2 es paralela al plano de ecuación: $3x - 2y - z = -1$, entonces la recta (y su vector director) deberían ser perpendiculares al vector normal al plano, $N = (3, -2, -1)$

Es decir que se debería cumplir que el producto escalar entre el vector director $A = (3, 2, 1)$ de la recta L_2 y el vector normal al plano N sea cero.

$$A . N = (3, 2, 1). (3, -2, -1) = 9 - 4 - 1 = 4 \neq 0$$

Por lo tanto la recta y el plano **no son paralelos.**

2. Dado el siguiente sistema, determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3x - 3y + z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) El subespacio de soluciones del sistema tiene dimensión 2. **Justificar** FALSO

b) El conjunto $\{(-1,2,3)\}$ constituye una base del subespacio de soluciones del sistema dado. **Justificar** VERDADERO

Para hallar la dimensión del subespacio solución, S, procedemos a calcular el rango de la matriz de los coeficientes, que llamaremos A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Para ello tenemos que llevar a la matriz de los coeficientes a la forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 + 3F_1, F_3 \to F_3 - 4F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Como el número de filas no nulas luego de escalonar la matriz es 2, el rango de la matriz de los coeficientes es 2, ahora calculemos la dimensión de S, que sabemos que es el número de incógnitas menos el rango de A

Dimensión S=3-2=1

Respuesta

La dimensión del subespacio de soluciones, S, es 1, y por lo tanto la primera afirmación es FALSA.

Ahora sabemos que el subespacio solución tiene dimensión 1, es una recta de R^3 que pasa por el origen y admite una base con un solo vector. Entonces veamos si el conjunto {(1,2,3)} constituye una base. Se puede hacer de muchas maneras pero vamos a hallar el conjunto solución del sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow[despejo\ y]{} y=2/3z \xrightarrow[reemplazo\ en\ la\ primera\ ecuación\ a\ y]{} x+2\cdot 2/3z-z=0$$

$\rightarrow x + \frac{1}{3} z = 0 \xrightarrow[despejo\ x]{} x = -1/3z$

Las soluciones son de la forma $(-1/3z, 2/3z, z)$ con z en R. Luego la ecuación vectorial del subespacio es

$X = t(-1/3,2/3,1)$ con t en R, luego como el vector $(-1,2,3)$ es paralelo al vector director de la recta porque $(-1,2,3) = 3 \cdot (-1/3,2/3,1)$ concluimos que el vector (-1,2,3) pertenece al subespacio y por ser un único vector es linealmente independiente entonces $\{(-1,2,3)\}$ es una base de S y la segunda afirmación es verdadera.

Respuesta

{(-1,2,3)} es una base de S y la segunda afirmación es verdadera.

3. Sea la matriz A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & k^2 \end{bmatrix}$

a) Hallar todos los valores reales de ***K*** para que el rango de la matriz sea 2.**Justificar**

SOLUCIÓN:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & k^2 \end{bmatrix} \text{L3} - \text{L1} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k^2-4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{L2} - \text{L3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-k^2 \end{bmatrix}$$

Si $4 - k^2 = 0, entonces$ la matriz tendrá rango 2 (Dos filas no nulas) → Para K =2 o K= -2 la matriz tiene rango 2

b) Si k =3, escribir la ecuación vectorial del subespacio generado por los vectores filas de A**. Justificar**

Si k = 3 la dimensión del subespacio generado por los vectores filas es 3 (tres filas no nulas). Para escribir la ecuación vectorial del subespacio generado por los vectores filas, multiplicamos cada uno de ellos por un parámetro.

X=(-1,2,-3,4).r + (0,1,2,0).s + (0,0, 0, -5).t $\quad r, s, t \in R$

4. Hallar, si existe, la intersección entre las rectas $L_1\ y\ L_2$. ($t\ y\ r\ \in R$)

$$L_1: X = (\,1,-1{,}0\,) + t\,(\,1,1,-2)$$
$$L_2: X = (\,2,2,-2\,) + r\,(-1,1,2)$$

Las rectas no coinciden porque los vectores directores no son paralelos.
Las rectas tendrán un punto en común P, si existe un valor del parámetro de t en la primera recta y un valor del parámetro r en la segunda tal que

P=$(\,1,-1{,}0\,) + t\,(\,1,1,-2)$ y
P= $(\,2,2,-2\,) + r\,(-1,1,2)$
O sea

$(\,1,-1{,}0\,) + t\,(\,1,1,-2)$= $(\,2,2,-2\,) + r\,(-1,1,2)$
O sea
$t\,(\,1,1,-2)$- $r\,(-1,1,2)$ =$(\,2,2,-2\,) - (\,1,-1{,}0\,)$

O sea
t +r = 1
t – r = 3
-2t-2r=-2

Resolviendo el sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \quad L_2 \rightarrow L_1 - L_2,\ L_3 \rightarrow 2L_1 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad L_3 \rightarrow 2L_1 + L_3$$

t + r =1
2r = -2
El sistema tiene la solución única t= 2, r =-1
Poniendo t=2 en la primera ecuación, se tiene P=(3,1,-4)

Se cortan en $P = (3,1,-4)$ para $t = 2, r = -1$

5. Sean los vectores: $V_1 = (-1,\ \ 0,\ \ 2)$, $V_2 = (2,\ \ -1,\ \ 1)$ y $V_3 = (3,\ \ -1,\ \ -1)$

a) Escribir una ecuación cartesiana del subespacio S de R^3 generado por V_1, V_2 y V_3

b) ¿El conjunto $\{V_1, V_3\}$ es una base del subespacio S? ¿Por qué?

a) Armamos una matriz con los vectores dados usando sus componentes como filas y la escalonamos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_1 + L_2 \to L_2 \\ 3L_1 + l_3 \to L_3}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \underset{L_2 - L_3 \to L_3}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego es: $rango\ A = 2 \ \Rightarrow la\ dimensión\ del\ subespacio\ filas\ es\ 2$

Como las filas de la matriz *A* son los vectores dados, entonces el subespacio generado por ellos tiene $\boldsymbol{dimensión\ 2}$ y una base de tal subespacio es $\boldsymbol{B} = \{(\mathbf{-1, 0, 2}), (\mathbf{0, -1, 5})\}$, el subespacio será el plano $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u} \cdot (\mathbf{-1, 0, 2}) + \boldsymbol{v} \cdot (\mathbf{0, -1, 5}) \quad , \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}$

Su ecuación cartesiana tendrá la forma $ax + by + cz = 0$ donde a,b y c serán las componentes de un vector Normal al plano, Lo calculamos:

$$N = (-1,0,2)x(0,-1,5) = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (2,5,1)$$

Una ecuación cartesiana del subespacio generado por los vectores V_1, V_2 y V_3 es:

$$\boldsymbol{2x + 5y + z = 0}$$

b) Como la dimensión del subespacio generado por los vectores dados es 2, cualquier conjunto de 2 vectores LI de dicho subespacio será una base de él. Analicemos si los vectores V_1 y V_3

son LI , es decir si no son paralelos:

$$(-1, 0,2) = c\ (\ 3, -1, -1)$$
$$-1 = 3c$$
$$0 = -c$$
$$2 = -c$$

Como no existe un único valor de c, no son paralelos entonces son LI, por lo tanto el conjunto $\{V_1, V_3\}$ es una base del subespacio generado por los vectores V_1 , V_2 y V_3.