Matematica 1 – Modelo parcial c

11. Hallar, si existe, la inversa de la siguiente matriz, $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$
Verificar el resultado.

Para el calculo de la matriz inversa podemos aplicar $A^{-1} = A^{adj} / Det(A)$

$\alpha_{11} = (-1.0 – 2.1) = -2$ $\alpha_{12} = - (0.0 – 1.1) = 1$ $\alpha_{13} = (0.2 - (-1)1) = 1$

$\alpha_{21} = -(-2.0 – 2.0) = 0$ $\alpha_{22} = (1.0 – 0.1) = 0$ $\alpha_{23} = -(1.2 – 1.(-2)) = -4$

$\alpha_{31} = (-2.1 - (-1).0) = -2$ $\alpha_{32} = -(1.1 – 0.0) = -1$ $\alpha_{33} = (1.(-1) – 0.(-2)) = -1$

Luego la A^{adj} sera:

$$A^{adj} = \begin{matrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{matrix}$$

$$Det(A) = 1(-1.0 – 2.1) – 0 + 1(-2.1 - (-1).0) = - 2 – 2 = -4$$

$$A\text{-}1 = \begin{vmatrix} -2/-4 & 0/-4 & -2/-4 \\ 1/-4 & 0/-4 & -1/-4 \\ 1/-4 & -4/-4 & -1/-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ½ & 0 & ½ \\ -¼ & 0 & ¼ \\ -¼ & 1 & ¼ \end{vmatrix}$$

Para verificar hay que hacer $A.A^{-1}$ y debe dar la matriz identidad.

Matematica 1 – Modelo parcial c

12. Demostrar que una matriz cuadrada A con dos filas (o dos columnas) iguales tiene determinante nulo.

Teorema 1.7.III

Si intercambiamos dos columnas (o filas) el determinante deberia cambiar de signo (teorema 1.7.II) pero sigue siendo la misma matriz, luego:

$$\det(A) = -\det(A)$$

y para que esto se cumpla debe ser $\det(A) = 0$

Matematica 1 – Modelo parcial c

13. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Calcular det(BA).

   b) Existe $(BA)^{-1}$? Justificar.

Para calcular el det(BA) primero debemos hacer el producto de $B.A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Pero el det(B.A) = 0

Por lo tanto, no se puede calcular $(BA)^{-1}$ porque el det(BA) = 0 (ver mas detalles en Teorema 1.9.II, pagina 70)

Matematica 1 – Modelo parcial c

14. Resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \\ x - 3y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Si queremos resolver el sistema aplicando la regla de Cramer, primero debemos calcular el determinante de los coeficientes de las variables:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Como la segunda columna es igual a la primera columna menos la tercera, hay una columna que es combinacion lineal de las otras dos y el determinante es nulo.

Por lo tanto, para resolver el sistema debemos utilizar otro metodo, por ejemplo Gauss Jordan:

Matematica 1 – Modelo parcial c

14. Resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \\ x - 3y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \times\left(\frac{1}{2}\right) \underset{F_1/(2) \to F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \times(-1) \underset{F_2 - 1\times F_1 \to F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \times(-1) \underset{F_3 - 1\times F_1 \to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{array}\right) \times\left(\frac{2}{5}\right) \underset{F_2/\left(\frac{5}{2}\right) \to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\times\left(\frac{5}{2}\right) \underset{F_3 - \left(\frac{-5}{2}\right)\times F_2 \to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times\left(\frac{1}{2}\right) \underset{F_1 - \left(\frac{-1}{2}\right)\times F_2 \to F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 1 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- De la ecuación 2 del sistema (1) encontramos con la variable x_2:
  $x_2 = x_3$
- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:
  $x_1 = 1 - x_3$

La respuesta:

- $x_1 = 1 - x_3$
- $x_2 = x_3$
- $x_3 = x_3$

Limpiar

Matematica 1 – Modelo parcial c

15. Resolver el siguiente sistema no lineal y representar graficamente:

$$(x-4)^2 + y^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

Despejamos y2 en ambas ecuaciones y las igualamos para despejar el valor de x:

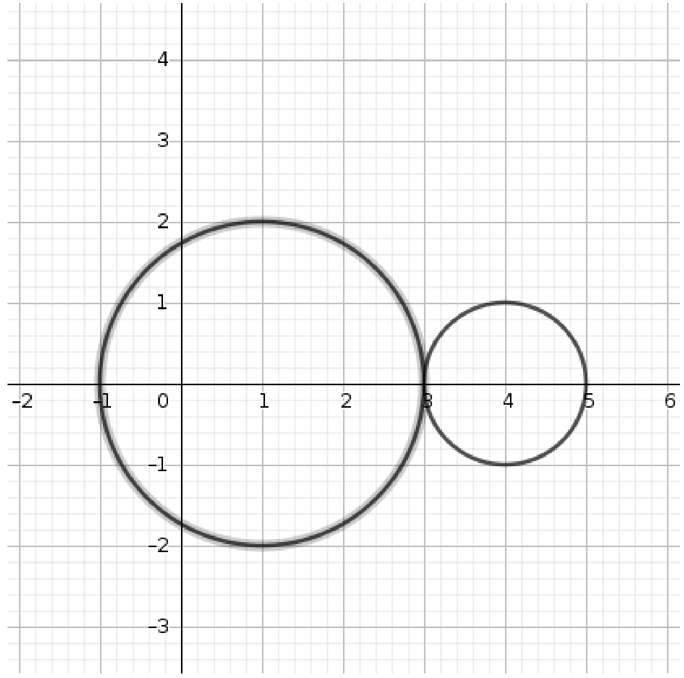
y2 = 1 – (x-4)2 ; y2 = 4 - (x-1)2 → 1 – (x-4)2 = 4 - (x-1)2

1 – (x2 – 2.4x + 16) = 4 – (x2 - 2x + 1) → 1 - x2 + 8x – 16 = 4 - x2 + 2x – 1 → 18 – 6x = 0

3 – 1x = 0 → x = 3 reemplazando este valor de x en una de las ecuaciones de y, nos queda:

y2 = 1 – (3-4)2 → y2 = 1 – (-1)2 = 1 – 1 = 0

Luego la solucion del sistema no lineal es (3, 0).



Matematica 1 – Modelo parcial d

16. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calcular el determinante de (A.B) y decir si es posible calcular $(A.B)^{-1}$

Multiplicación de matrices: filas de la primera matriz se multiplican por columnas de la segunda matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1+(-1)\times 2 & 1\times(-1)+(-1)\times 3 \\ 2\times 1+3\times 2 & 2\times(-1)+3\times 3 \\ 0\times 1+2\times 2 & 0\times(-1)+2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Para que exista el determinante de $(A.B)^{-1}$ debe ser A.B cuadrada, luego no existe el determinante de A.B ni la inversa de A.B.

Matematica 1 – Modelo parcial d

17. Resolver, si es posible, usando la Regla de Cramer, el siguiente sistema lineal:

$$
\begin{aligned}
y + z &= 2\\
x + y + 2z &= 0\\
2x - 6y + 2z &= 2
\end{aligned}
$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 30; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -18;$$

- $x_1 = \Delta_1 / \Delta = \frac{30}{-6} = -5$
- $x_2 = \Delta_2 / \Delta = \frac{6}{-6} = -1$
- $x_3 = \Delta_3 / \Delta = \frac{-18}{-6} = 3$

La respuesta:

$x_1 = -5$

$x_2 = -1$

$x_3 = 3$

Matematica 1 – Modelo parcial d

18. Resolver y representar gráficamente

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$
$$x + y = 2$$

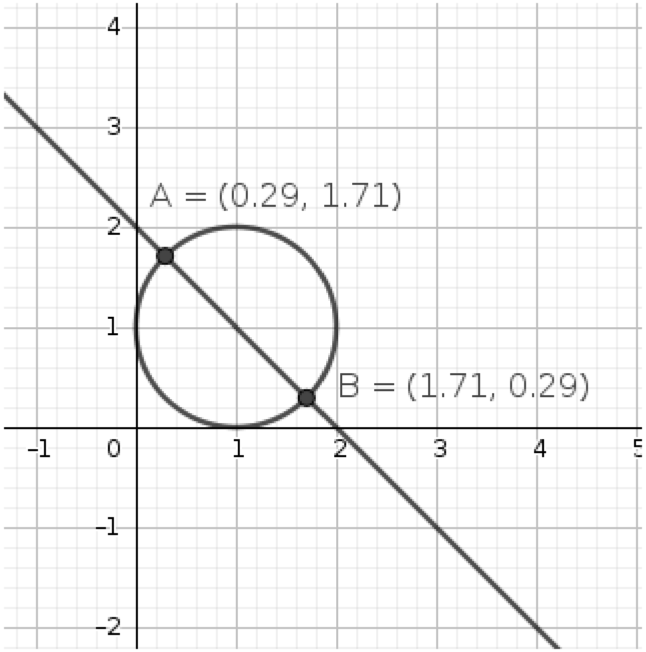
Para resolver despejamos y en una ecuacion y la reemplazamos en la otra:

$x = 2 – y \rightarrow (y-1)^2 + ((2-y) – 1)^2 = 1$ desarrollando nos queda $2y^2 - 4y + 1 = 0$

Resolviendo la ecuacion cuadratica tenemos: $y1 = (2+\sqrt{2})/2$ $y2 = (2-\sqrt{2})/2$

reemplazando estoy valores de y en $x = 2 – y$:

$$x1 = (2-\sqrt{2})/2 \qquad x2 = (2+\sqrt{2})/2$$

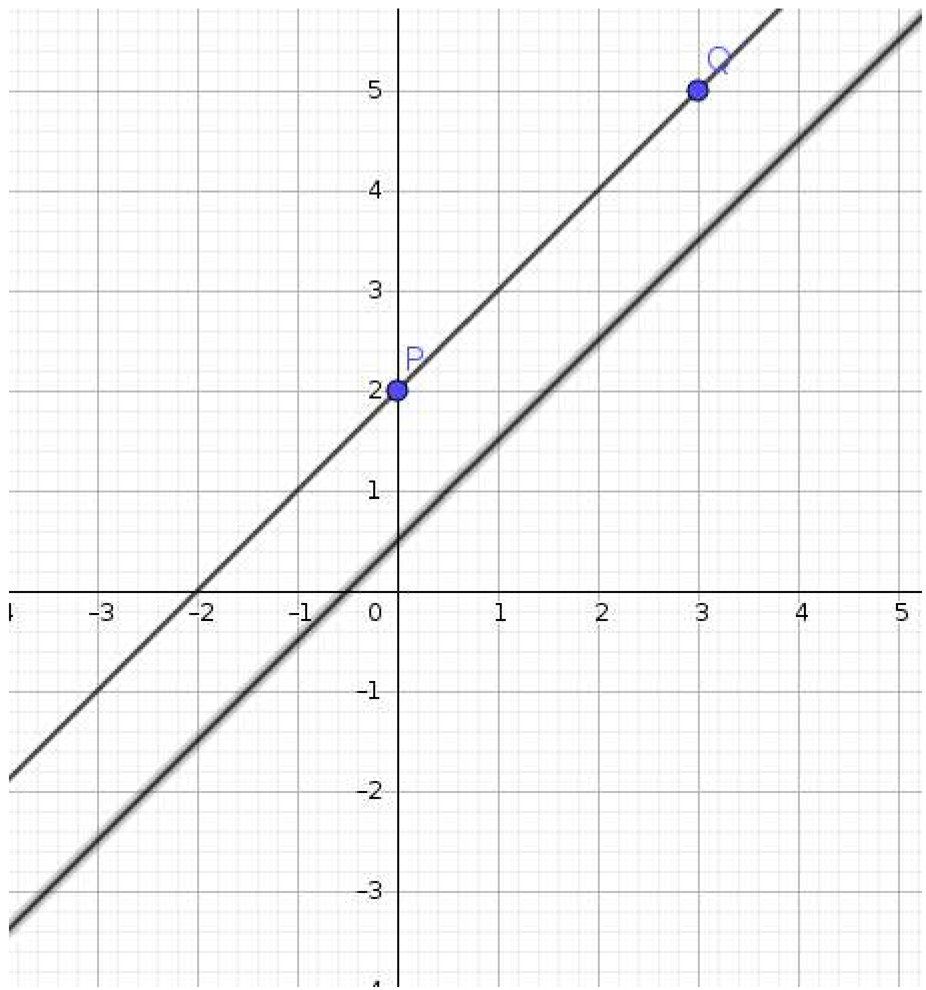


Matematica 1 – Modelo parcial d

19. Dada la recta $2y - 2x - 1 = 0$ y la recta que pasa por los puntos $P = (0, 2)$ y $Q = (3, 5)$ decir si son paralelas o perpendiculares.

La recta que pasa por P y Q es $y = x - 2$, la otra recta es $y = x + \frac{1}{2}$,

luego las pendientes son iguales por lo que ambas rectas son paralelas.



Matematica 1 – Modelo parcial d

20. Sea A una matriz cuadrada de dimension n, sabiendo que

$\text{Det}\,(A.A^T) = 3 + \det(I)$, calcular el valor del Det(A).

$\text{Det}\,(A.A^T) = \text{Det}\,A\,.\,\text{Det}\,A^T$ pero como $\text{Det}\,A = \text{Det}\,A^T$

Nos queda $\text{Det}\,(A.A^T) = \text{Det}\,A\,.\,\text{Det}\,A$, tambien sabemos que $\text{Det}\,I = 1$

reemplazando nos queda:

$$\text{Det}\,(A.A^T) = \text{Det}A\,.\,\text{Det}A = (\text{Det}\,A)^2 = 3 + 1 = 4$$

$$|\text{Det}\,A| = 2 \rightarrow \text{Det}\,A = 2 \text{ o } \text{Det}\,A = -2$$